

# 1 Systeme mit einem Freiheitsgrad

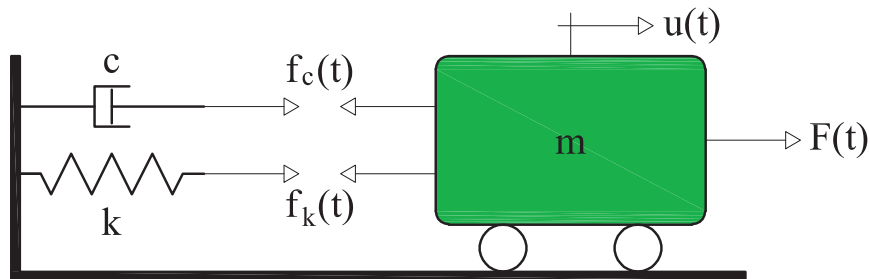
## 1.1 Formulierung der Bewegungsgleichung

### 1.1.1 Direkte Formulierung

1) Zweites Newtonsches Gesetz (Aktionsprinzip)

$$F = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{u}) = m\ddot{u} \quad (I = \text{Impuls}) \quad (1.1)$$

Die Kraft entspricht der Änderung des Impulses nach der Zeit.



$$-f_k(t) - f_c(t) + F(t) = m\ddot{u}(t) \quad (1.2)$$

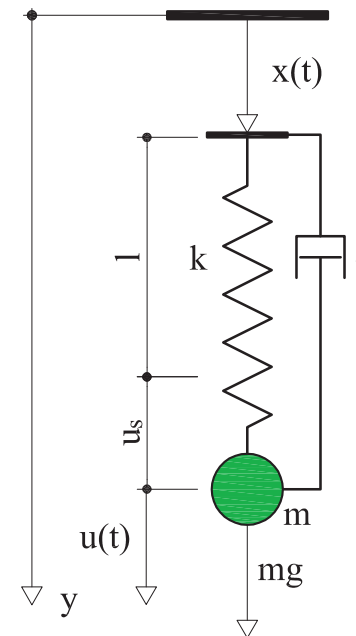
Mit der Federkraft  $f_k(t) = ku(t)$  und der Dämpfungskraft  $f_c(t) = c\dot{u}(t)$  wird Gleichung (1.2) zu:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \quad (1.3)$$

2) Prinzip von d'Alembert

$$F + T = 0 \quad (1.4)$$

Das Prinzip basiert auf die Idee einer fiktiven Trägheitskraft, die gleich dem Produkt der Masse mal ihre Beschleunigung ist und die in entgegengesetzter Richtung zur Beschleunigung wirkt. Der Massenpunkt steht zu jeder Zeit unter der resultierenden Kraft  $F$  und der Trägheitskraft  $T = -m\ddot{u}$  im Gleichgewicht.



$$y = x(t) + l + u_s + u(t) \quad (1.5)$$

$$\ddot{y} = \ddot{x} + \ddot{u} \quad (1.6)$$

$$T = -m\ddot{y} = -m(\ddot{x} + \ddot{u}) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} F &= -k(u_s + u) - c\dot{u} + mg \quad (1.8) \\ &= -ku_s - ku - c\dot{u} + mg \\ &= -ku - c\dot{u} \end{aligned}$$

$$F + T = 0 \quad (1.9)$$

$$-c\dot{u} - ku - m\ddot{x} - m\ddot{u} = 0 \quad (1.10)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x} \quad (1.11)$$

- Zur Herleitung der Bewegungsgleichung wird das dynamische Gleichgewicht für jede Kraftkomponente formuliert. Dazu müssen die Kräfte und gegebenenfalls auch die Momente in ihre Komponenten in den Koordinatenrichtungen zerlegt werden.

### 1.1.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta u \tag{1.12}$$

- Virtuelle Verschiebung = gedachte infinitesimale Verschiebung
- Sollen am Besten kinematisch zulässig sein, sodass die noch unbekannt Reaktionskräfte keine Arbeit leisten

$$\delta A_i = \delta A_a \tag{1.13}$$

- Dabei müssen auch die Trägheitskräfte und die Dämpfungskräfte berücksichtigt werden

$$(f_m + f_c + f_k)\delta u = F(t)\delta u \tag{1.14}$$

### 1.1.3 Energie Formulierung

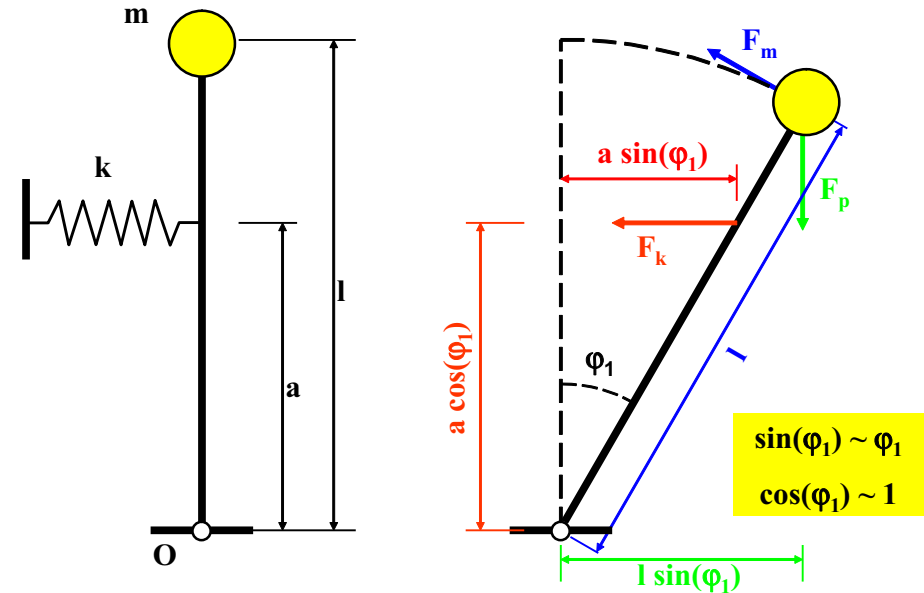
- **Kinetische Energie T** (Arbeit, die eine äussere Kraft leisten muss, um eine Masse zu bewegen)
- **Deformationsenergie U** (wird aus der Arbeit bestimmt, die eine äussere Kraft leisten muss, um eine Deformation zu erzeugen)
- **Potentielle Energie der äusseren Kräfte V**
- Energieerhaltungssatz (Konservative Systeme)

$$E = T + U + V = T_o + U_o + V_o = \text{konstant} \tag{1.15}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{1.16}$$

### 1.2 Beispiel "Inverted Pendulum"

#### Direkte Formulierung



$$\text{Federkraft: } F_k = a \cdot \sin(\varphi_1) \cdot k \approx a \cdot \varphi_1 \cdot k \tag{1.17}$$

$$\text{Trägheitskraft: } F_m = \ddot{\varphi}_1 \cdot l \cdot m \tag{1.18}$$

$$\text{Externe Kraft: } F_p = m \cdot g \tag{1.19}$$

#### Gleichgewicht

$$F_k \cdot a \cdot \cos(\varphi_1) + F_m \cdot l - F_p \cdot l \cdot \sin(\varphi_1) = 0 \tag{1.20}$$

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (a^2 \cdot k - m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi_1 = 0 \quad (1.21)$$

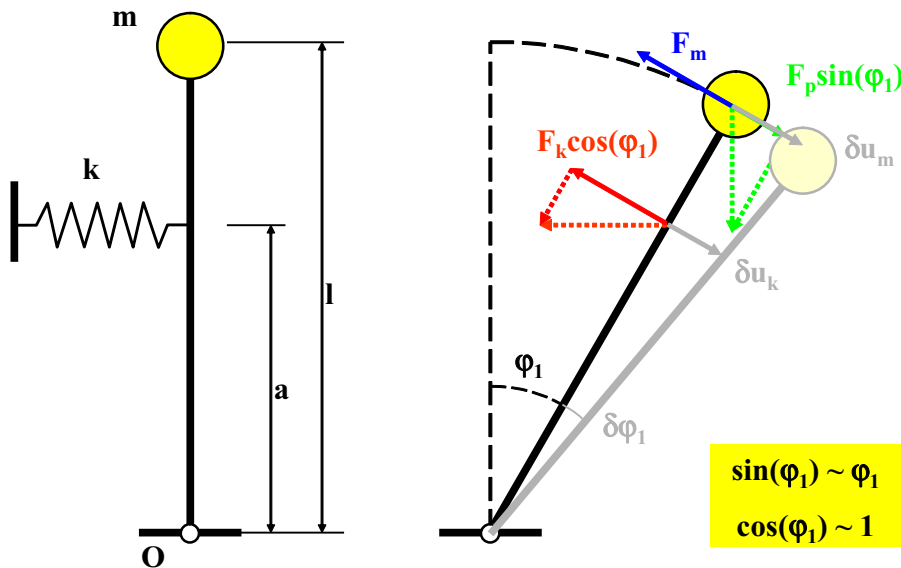
Eigenkreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{K_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot k - m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot k}{m \cdot l^2} - \frac{g}{l}} \quad (1.22)$$

System stabil wenn:

$$\omega > 0: \quad a^2 \cdot k > m \cdot g \cdot l \quad (1.23)$$

**Formulierung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit**



Federkraft:  $F_k \cdot \cos(\varphi_1) \approx a \cdot \varphi_1 \cdot k \quad (1.24)$

Trägheitskraft:  $F_m = \ddot{\varphi}_1 \cdot l \cdot m \quad (1.25)$

Externe Kraft:  $F_p \cdot \sin(\varphi_1) \approx m \cdot g \cdot \varphi_1 \quad (1.26)$

Virtuelle Verschiebungen:

$$\delta u_k = \delta \varphi_1 \cdot a, \quad \delta u_m = \delta \varphi_1 \cdot l \quad (1.27)$$

Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$(F_k \cdot \cos(\varphi_1)) \cdot \delta u_k + (F_m - (F_p \cdot \sin(\varphi_1))) \cdot \delta u_m = 0 \quad (1.28)$$

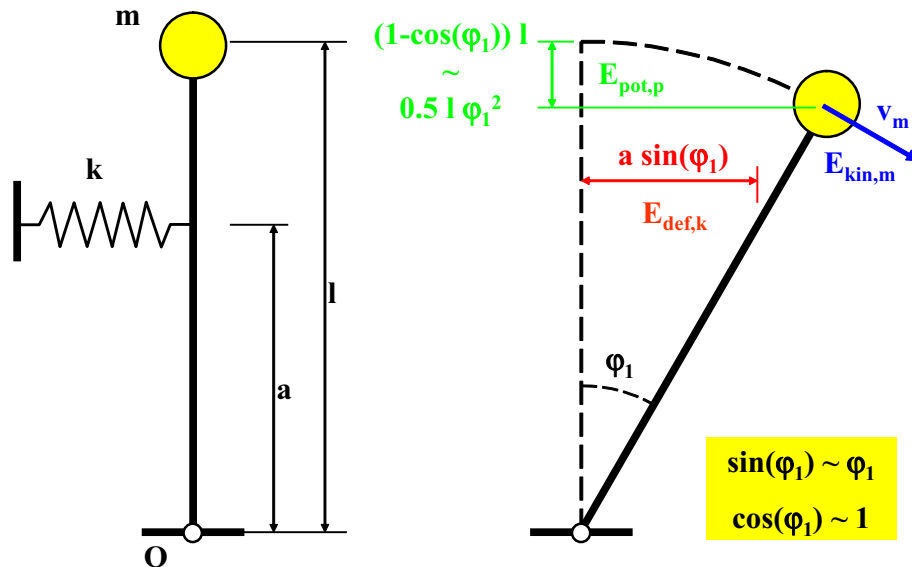
$$(a \cdot \varphi_1 \cdot k) \cdot \delta \varphi_1 \cdot a + (\ddot{\varphi}_1 \cdot l \cdot m - m \cdot g \cdot \varphi_1) \cdot \delta \varphi_1 \cdot l = 0 \quad (1.29)$$

Nach wegekürzen von  $\delta \varphi_1$  erhält man die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (a^2 \cdot k - m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi_1 = 0 \quad (1.30)$$

Die Bewegungsgleichung (1.30) entspricht Gleichung (1.21).

## Energie Formulierung



$$\text{Feder: } E_{\text{def},k} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot [a \cdot \sin(\varphi_1)]^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (a \cdot \varphi_1)^2 \quad (1.31)$$

$$\text{Masse: } E_{\text{kin},m} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_m^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot l)^2 \quad (1.32)$$

$$E_{\text{pot},p} = -(m \cdot g) \cdot (1 - \cos(\varphi_1)) \cdot l \quad (1.33)$$

$\cos(\varphi_1)$  kann folgendermassen als Reihe ausgedrückt werden:

$$\cos(\varphi_1) = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2!} + \frac{\varphi_1^4}{4!} - \dots + (-1)^k \cdot \frac{\varphi_1^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad (1.34)$$

Für kleinen Winkeln  $\varphi_1$  gilt:

$$\cos(\varphi_1) = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \text{ bzw. } \frac{\varphi_1^2}{2} = 1 - \cos(\varphi_1) \quad (1.35)$$

und Gleichung (1.33) wird:

$$E_{\text{pot},p} = -(m \cdot g \cdot 0.5 \cdot l \cdot \varphi_1^2) \quad (1.36)$$

Energiesatz

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{def},k} + E_{\text{kin},m} + E_{\text{pot},p} = \text{konstant} \quad (1.37)$$

$$E = \frac{1}{2} (m \cdot l^2) \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (k \cdot a^2 - m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi_1^2 = \text{konstant} \quad (1.38)$$

Ableitung der Energie nach der Zeit:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{Ableitungsregel: } (g \cdot f)' = (g' \cdot f) + g \cdot f' \quad (1.39)$$

$$(m \cdot l^2) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (k \cdot a^2 - m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = 0 \quad (1.40)$$

Nach Heraus Kürzen der Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}_1$ :

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + (a^2 \cdot k - m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi_1 = 0 \quad (1.41)$$

Die Bewegungsgleichung (1.41) entspricht Gleichungen (1.21) und (1.30).

Vergleich der Energiemaxima

$$KE = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{\varphi}_{1,max} \cdot l)^2 \tag{1.42}$$

$$PE = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (a \cdot \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot m \cdot l \cdot \varphi_1^2 \tag{1.43}$$

Gleichstellung von KE und PE

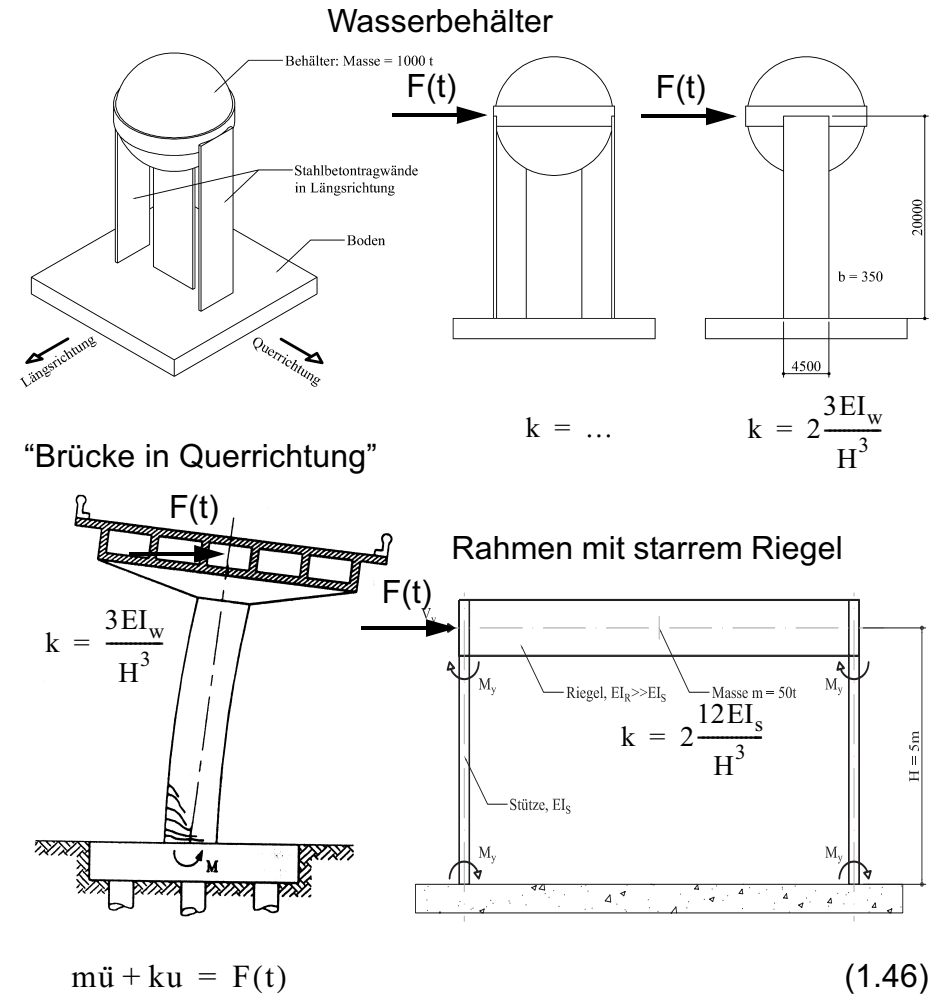
$$\dot{\varphi}_{1,max} = \left( \sqrt{\frac{a^2 \cdot k - m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2}} \right) \cdot \varphi_1 \tag{1.44}$$

$$\dot{\varphi}_{1,max} = \omega \cdot \varphi_1 \tag{1.45}$$

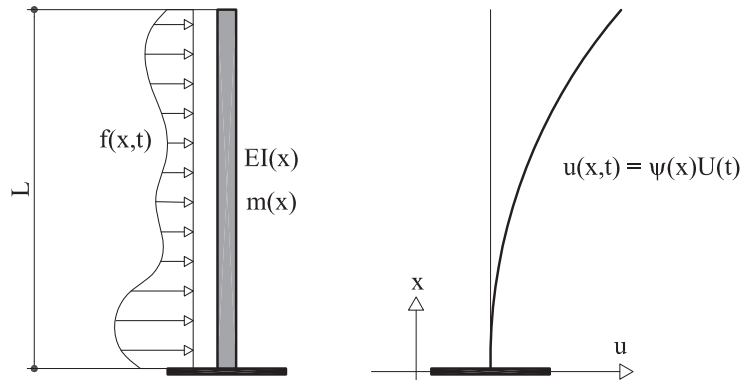
- $\omega$  unabhängig vom Anfangswinkel  $\varphi_1$
- je grösser die Auslenkung, desto grösser die Maximalgeschwindigkeit.

1.3 Modellbildung

1.3.1 Strukturen mit konzentrierten Massen



1.3.2 Strukturen mit verteilten Massen



Verschiebung:  $u(x, t) = \psi(x)U(t)$  (1.47)

Externe Kräfte:  $t(x, t) = -m\ddot{u}(x, t)$   
 $f(x, t)$  (1.48)

- Prinzip der virtuellen Arbeit

$\delta A_i = \delta A_a$  (1.49)

$\delta A_a = \int_0^L (t \cdot \delta u) dx + \int_0^L (f \cdot \delta u) dx$  (1.50)  
 $= - \int_0^L (m\ddot{u} \cdot \delta u) dx + \int_0^L (f \cdot \delta u) dx$

$\delta A_i = \int_0^L (M \cdot \delta \varphi) dx$  wobei: (1.51)

$M = EIu''$  und  $\delta \varphi = \delta[u'']$  (1.52)

$\delta A_i = \int_0^L (EIu'' \cdot \delta[u'']) dx$  (1.53)

- Umformungen:

$u'' = \psi''U$  und  $\ddot{u} = \psi\ddot{U}$  (1.54)

- Die virtuelle Verschiebung ist affin zur gewählten Verformung:

$\delta u = \psi\delta U$  und  $\delta[u''] = \psi''\delta U$  (1.55)

- Mit Gleichungen (1.54) und (1.55) wird die Arbeit der äusseren Kräfte  $\delta A_a$ :

$\delta A_a = - \int_0^L (m\psi\ddot{U} \cdot \psi\delta U) dx + \int_0^L (f \cdot \psi\delta U) dx$  (1.56)  
 $= \delta U \left[ -\ddot{U} \int_0^L m\psi^2 dx + \int_0^L f\psi dx \right]$

- Mit Gleichungen (1.54) und (1.55) wird die Arbeit der inneren Kräfte  $\delta A_i$ :

$\delta A_i = \int_0^L (EI\psi''U \cdot \psi''\delta U) dx = \delta U \left[ U \int_0^L (EI(\psi'')^2) dx \right]$  (1.57)

- Gleichung (1.49) ist gültig für alle virtuellen Verschiebungen, deshalb:

$U \int_0^L (EI(\psi'')^2) dx = -\ddot{U} \int_0^L m\psi^2 dx + \int_0^L f\psi dx$  (1.58)

$m^* \ddot{U} + k^* U = F^*$  (1.59)

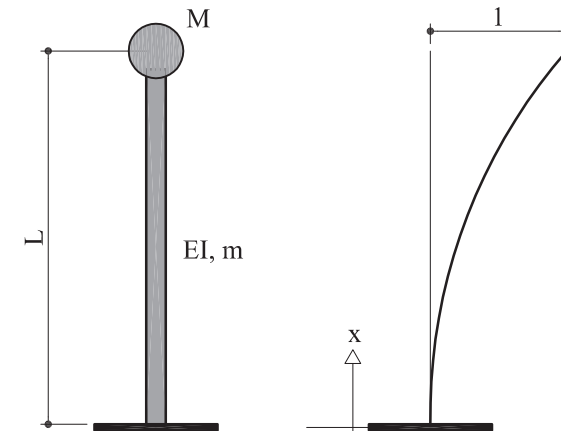
- Eigenkreisfrequenz

$$\omega_n^2 = \frac{k^*}{m^*} = \frac{\int_0^L (EI(\psi'')^2) dx}{\int_0^L m\psi^2 dx} \quad (1.60)$$

-> Rayleigh-Quotienten

- Wahl der Verformungsfigur
  - Die Genauigkeit der Modellierung ist von der Annahme der Verformungsfigur abhängig;
  - Die besten Resultate werden dann erzielt, wenn die Verformungsfigur alle Lagerungsbedingungen erfüllt;
  - Die Lagerungsbedingungen sind automatisch erfüllt, wenn die Verformungsfigur die Biegelinie einer externen Belastung entspricht;
  - Eine mögliche externe Belastung ist das Eigengewicht der Struktur in der untersuchten Richtung.
- Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten
  - Die geschätzte Eigenfrequenz ist immer höher als die Exakte (**Minimierung!**);
  - Man bekommt brauchbare Resultate auch wenn die angenommene Verformungsfigur nicht sehr realistisch ist.

- Beispiel Nr. 1: Kragarm mit verteilter Masse



$$\psi = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad \psi'' = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (1.61)$$

$$m^* = \int_0^L m \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx + \psi^2(x=L)M \quad (1.62)$$

$$= \frac{1}{2}m \left( \frac{3\pi x - 8 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)L + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)L}{\pi} \right) \Bigg|_0^L + M$$

$$= \frac{(3\pi - 8)}{2\pi} mL + M = 0.23mL + M$$

$$k^* = EI \left( \frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \left( \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \right)^2 dx \quad (1.63)$$

$$= EI \left( \frac{\pi}{2L} \right)^4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\pi x + 2 \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{2L} \right) L}{\pi} \right) \Bigg|_0^L$$

$$= \frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{EI}{L^3} = 3.04 \cdot \frac{EI}{L^3} \approx \frac{3EI}{L^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{(0.23mL + M)L^3}} \quad (1.64)$$

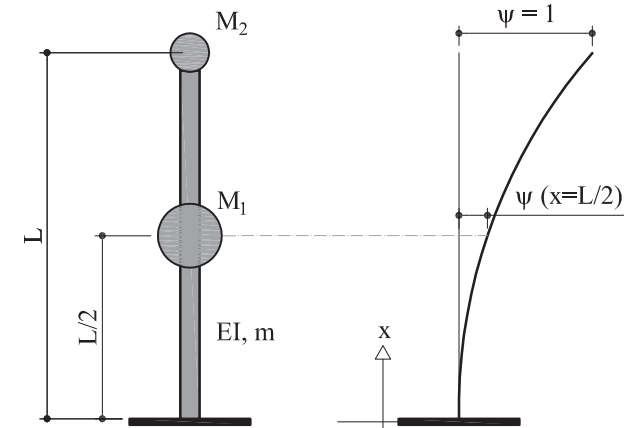
- Kontrolle der Randbedingungen der Verformungsfigur

$$\psi(0) = 0 ? \rightarrow \psi(x) = 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right): \quad \psi(0) = 0 \text{ OK!}$$

$$\psi'(0) = 0 ? \rightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{2L} \sin \left( \frac{\pi x}{2L} \right): \quad \psi'(0) = 0 \text{ OK!}$$

$$\psi''(L) = 0 ? \rightarrow \psi''(x) = \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right): \quad \psi''(L) = 0 \text{ OK!}$$

- Beispiel Nr. 2: Kragarm mit verteilter Masse



$$\psi = 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right), \quad \psi'' = \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (1.65)$$

- Berechnung der Masse  $m^*$

$$m^* = \int_0^L m \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \right)^2 dx + \psi^2 \left( x = \frac{L}{2} \right) M_1 + \psi^2 (x = L) M_2 \quad (1.66)$$

$$m^* = \frac{(3\pi - 8)}{2\pi} mL + \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 \cdot M_1 + 1^2 \cdot M_2 \quad (1.67)$$

$$m^* = \frac{(3\pi - 8)}{2\pi} mL + \left( \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \right) \cdot M_1 + M_2 \quad (1.68)$$

$$m^* = 0.23mL + 0.086M_1 + M_2 \quad (1.69)$$



- Berechnung der Steifigkeit  $k^*$

$$k^* = EI \left( \frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \left( \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \right)^2 dx \quad (1.70)$$

$$k^* = \frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{EI}{L^3} = 3.04 \cdot \frac{EI}{L^3} \approx \frac{3EI}{L^3} \quad (1.71)$$

- Berechnung der Eigenkreisfrequenz  $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{3.04EI}{(0.23mL + 0.086M_1 + M_2)L^3}} \quad (1.72)$$

**Spezialfall:**  $m = 0$  und  $M_1 = M_2 = M$

$$\omega = \sqrt{\frac{3.04EI}{(1.086M)L^3}} = 1.673 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad (1.73)$$

Die genaue erste Eigenkreisfrequenz eines Zweimassenschwingers mit konstanter Steifigkeit und gleichen Massen ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{3.007EI}{(1.102M)L^3}} = 1.652 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad (1.74)$$

Als numerischer Beispiel kann die erste Eigenfrequenz eines Stahlprofils HEB360 (Biegung um die starke Achse),  $L = 10\text{m}$  hoch und mit zwei Massen  $M_1 = M_2 = 10\text{t}$ :

$$EI = 200000 \cdot 431.9 \times 10^6 = 8.638 \times 10^{13} \text{Nmm}^2 \quad (1.75)$$

$$EI = 8.638 \times 10^4 \text{kNm}^2 \quad (1.76)$$

Aus Gleichung (1.73)

$$\omega = 1.673 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} = 1.673 \sqrt{\frac{8.638 \times 10^4}{10 \cdot 10^3}} = 4.9170 \quad (1.77)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega = \frac{4.9170}{2\pi} = 0.783 \text{Hz} \quad (1.78)$$

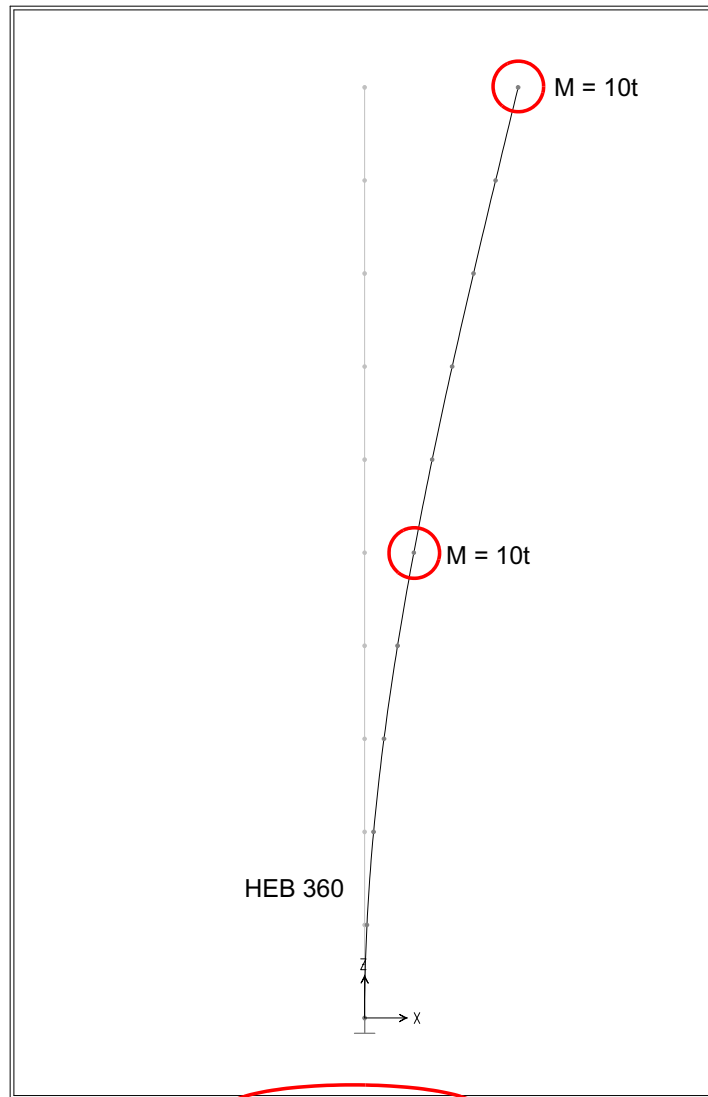
Aus Gleichung (1.74)

$$f = \frac{1.652}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} = \frac{1.652}{2\pi} \sqrt{\frac{8.638 \times 10^4}{10 \cdot 10^3}} = 0.773 \text{Hz} \quad (1.79)$$

Die erste Eigenkreisfrequenz von so einem Einmassenschwinger kann mit einem FE-Programm (z.B. Statik 5) berechnet werden. Sie beträgt:

$$T = 1.2946\text{s}, f = 0.772 \text{Hz} \quad (1.80)$$

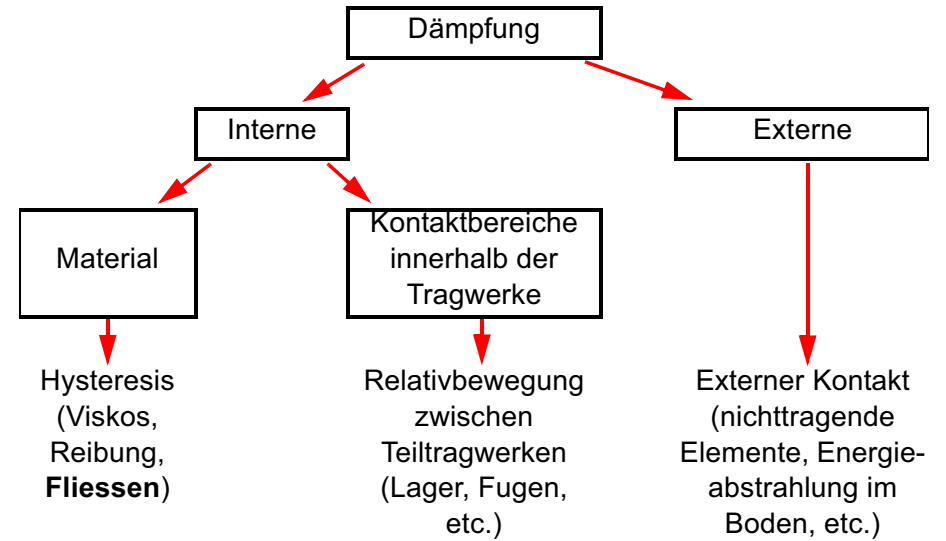
Die Übereinstimmung der Gleichungen (1.78), (1.79) und (1.80) ist sehr gut. Die Darstellung der ersten Eigenfrequenz aus einem FE-Programm ist im nächsten Bild angegeben.



SAP2000 v8 - File:HEB\_360 - Mode 1 Period 1.2946 seconds - KN-m Units

### 1.3.3 Dämpfung

- Dämpfungsarten

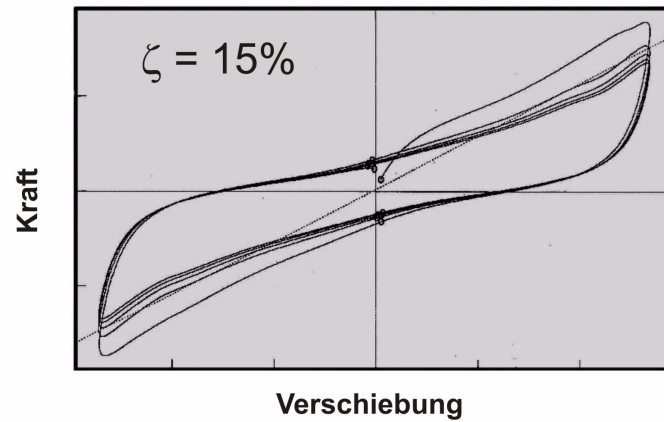
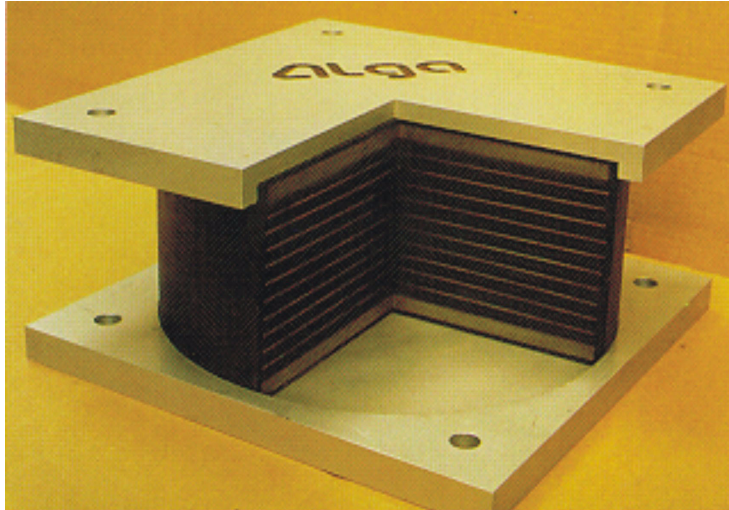


- Angaben zur Dämpfung von Tragwerken

Material	Dämpfung $\zeta$
Stahlbeton (ungerissen)	0.007 - 0.010
Stahlbeton (gerissen)	0.010 - 0.040
Stahlbeton (Vorgespannt)	0.004 - 0.007
Stahlbeton (Teilweise Vorspannung)	0.008 - 0.012
Verbundbauteile	0.002 - 0.003
Stahl	0.001 - 0.002

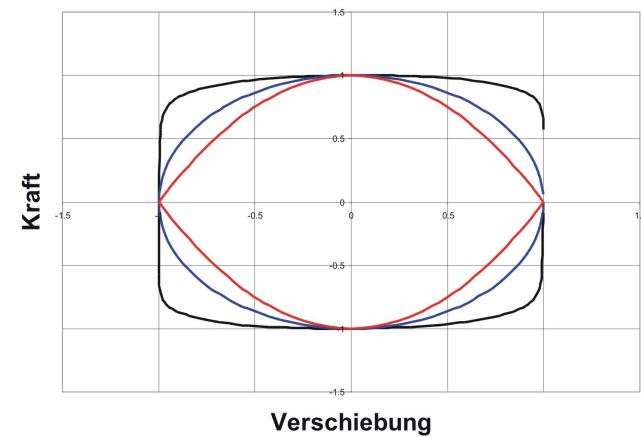
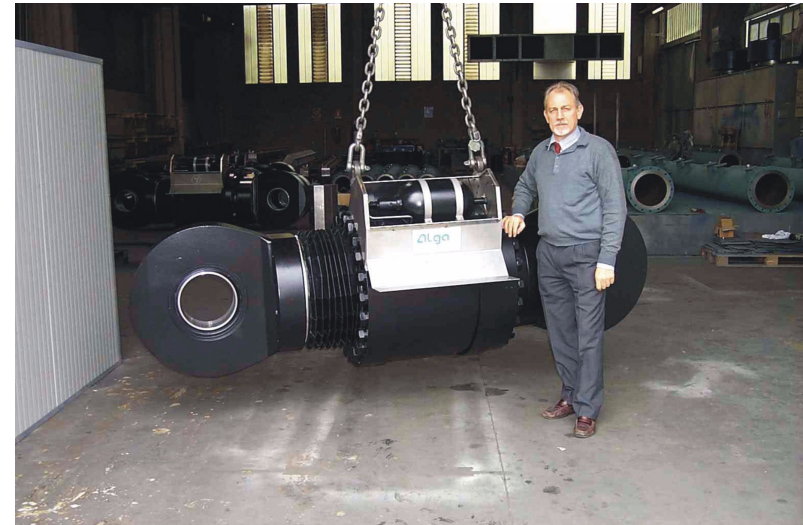
Tabelle C.1 aus [Bac+97]

- Lager



Quelle: A. Marioni: "Innovative Anti-seismic Devices for Bridges".  
[SIA03]

- Dissipatoren



Quelle: A. Marioni: "Innovative Anti-seismic Devices for Bridges".  
[SIA03]