

## 2.3 Inelastische Modellierung von Tragwerken

### 2.3.1 Einführung

Die Berechnung von inelastischen Pushover Kurven oder die Durchführung von inelastischen Zeitverlaufsberechnungen erfordern eine inelastische Modellierung des Tragwerks.

In der Regel erfolgt diese Modellierung anhand von entsprechenden Computerprogrammen. Die inelastische Modellierung von Tragwerken erfordert aber eine wesentlich höhere Expertise im Vergleich zur elastischen Modellierung der gleichen Tragwerke.

Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt wichtige ausgewählte Themen zu dieser Problematik diskutiert.

Diese sind:

- Die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten der Materialien:
  - Materialgesetze für nichtlineare Berechnungen
  - Elemente mit verteilter Plastizität
  - Elemente mit konzentrierter Plastizität
- Die Lösungsalgorithmen
  - Gleichgewichtsbedingung für statische Berechnungen
  - Das Newton-Raphson Verfahren
  - Gleichgewichtsbedingung für dynamische Berechnungen
- Die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten
  - Initiale Spannungen (2. Ordnung)
  - Grosse Element-Verschiebungen und -Rotationen
- Modellierung der Dämpfung bei nichtlinearen Zeitverlaufsberechnungen.

### 2.3.2 Materialgesetze für nichtlineare Berechnungen

Monotone oder zyklische Materialgesetze spielen eine wichtige Rolle bei der nichtlinearen Modellierung von Tragwerken. Sie werden nämlich bei folgenden Tätigkeiten verwendet:

- Die Berechnung der Steifigkeit und des Widerstands von Elementen mit verteilter Plastizität (Faserelemente);
- Die Berechnung der Steifigkeit und des Widerstands von plastischen Gelenken die Faserquerschnitte aufweisen (Elemente mit konzentrierter Plastizität);
- Die Kalibrierung der Steifigkeit und des Widerstands von plastischen Gelenken die auf "Rules-Based" hysteretischen Gesetzen basieren (z.B. Takeda).

Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt je ein Materialgesetz für Bewehrungsstahl und Beton präsentiert.

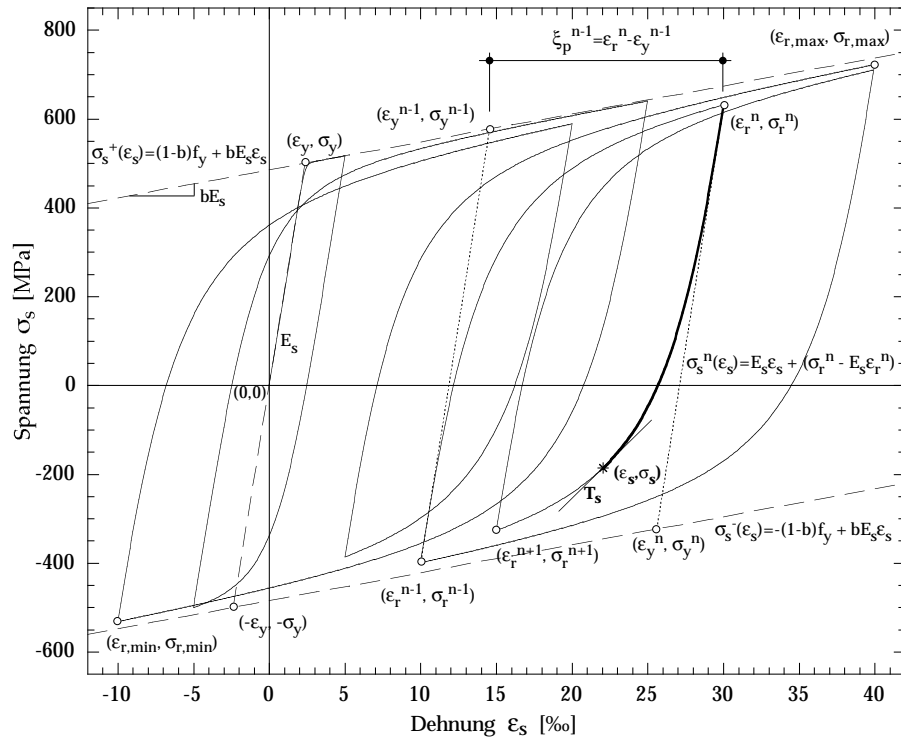
#### Bewehrungsstahl

In der Literatur sind unterschiedliche Materialgesetze für den Bewehrungsstahl zu finden. Hier wird aber nur das Materialgesetz nach Menegetto-Pinto beschrieben. Es wurde erstmals in [MP73] präsentiert und dann in [Cia+82] in einfachster Art und Weise für eine beliebige Dehnungs-Geschichte generalisiert.

Das Gesetz besteht aus der expliziten Spannungs-Dehnungs-Beziehung zwischen zwei Umkehrpunkten  $(\epsilon_r^n, \sigma_r^n)$  und  $(\epsilon_r^{n+1}, \sigma_r^{n+1})$  gemäss Gleichung (62). Ein Beispiel dafür ist die dick-gezeichnete Linie im Bild auf Seite 101.

$$\sigma_s(\epsilon_s) = \left( b\epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}} \right) \cdot (\sigma_y^n - \sigma_r^n) + \sigma_r^n \quad (62)$$

Wobei



Hysteretische Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den Bewehrungsstahl nach [MP73]

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon_s - \epsilon_r^n}{\epsilon_y^n - \epsilon_r^n} \quad (63)$$

$$R = R_o - \frac{a_1 \cdot \xi_{p,max}^*}{a_2 + \xi_{p,max}^*} \quad \text{mit} \quad \xi_{p,max}^* = \max \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \xi_p^n \\ \epsilon_y^o \\ \epsilon_r^o \end{array} \right\} \right\} \quad (64)$$

Durch Ableiten von (62) nach der Dehnung  $\epsilon_s$  erhält man das Tangentenmodul:

$$T_s(\epsilon_s) = \frac{d\sigma_s}{d\epsilon_s} = \left( b + \frac{(1-b)}{(1+\epsilon^*)^{1/R}} - \frac{(1-b) \cdot \epsilon^{*R}}{(1+\epsilon^*)^{(R+1)/R}} \right) \cdot E_s \quad (65)$$

Der Parameter R ermöglicht eine einfache aber gute Erfassung des Bauschinger-Effekts. Dieser ist bekanntlich stark von der maximal aufgetretenen plastischen Dehnung  $\xi_{p,max}^*$  abhängig.

Wenn keine genauere Informationen vorhanden sind, können die Parameter R,  $a_1$  und  $a_2$  gemäss [MP73] gewählt werden, und zwar wie folgt:

$$R = 20 \quad , \quad a_1 = 18.5 \quad , \quad a_2 = 0.15 \quad (66)$$

Die Parameter  $\sigma_y^o = f_y$ ,  $E_s$ ,  $\epsilon_y^o = \sigma_y^o/E_s$  und b sollen hingegen von Fall zu Fall aufgrund gemessener Materialeigenschaften kalibriert werden.

Die hysteretische Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Bewehrungsstahls unter einer allgemeinen Dehnungs-Geschichte ist im Bild auf Seite 101 dargestellt und wird durch die folgenden vier Kurven eindeutig beschrieben:

- 1) **Monotone Umhüllende**, d.h. die Kurven die im Bild gestrichelt gezeichnet sind.
- 2) **Obere Belastungskurve**, d.h. die Belastungskurve nach Gleichung (62) mit Ursprung im Punkt mit minimaler Dehnung  $(\epsilon_{r,min}, \sigma_{r,min})$ .
- 3) **Untere Entlastungskurve**, d.h. die Entlastungskurve nach Gleichung (62) mit Ursprung im Punkt mit maximaler Dehnung  $(\epsilon_{r,max}, \sigma_{r,max})$ .
- 4) **Aktuelle Kurve**, d.h. die Entlastungs- oder Belastungskurve mit Ursprung im letzten Umkehrpunkt  $(\epsilon_r^n, \sigma_r^n)$ .

Ist  $\epsilon_r^n$  grösser als  $\epsilon_{r,max}$  oder kleiner als  $\epsilon_{r,min}$ , dann findet die Entlastung bzw. Belastung asymptotisch zur monotonen Umhüllenden nach Gleichung (62) statt. Liegt  $\epsilon_r^n$  hingegen innerhalb von  $(\epsilon_{r,min}, \epsilon_{r,max})$ , dann findet die Entlastung bzw. Belastung zuerst asymptotisch zur monotonen Umhüllenden nach Gleichung (62) statt; sobald die aktuelle Kurve die

untere Entlastungskurve bzw. die obere Belastungskurve erreicht, wird entlang dieser weiterbelastet. Mit dieser hysteretischen Beziehung müssen bei einer allgemeinen Dehnungs-Geschichte – vor allem in dynamischen Berechnungen – die in [Cia+82] erwähnten Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden. Der entscheidende Vorteil liegt aber darin, dass die Belastungsgeschichte pro Stahlfaser allein durch die Parameter  $(\varepsilon_r^n, \sigma_r^n)$ ,  $(\varepsilon_{r,\min}, \sigma_{r,\min})$ ,  $(\varepsilon_{r,\max}, \sigma_{r,\max})$  und  $\xi_{p,\max}^*$  vollständig beschrieben wird.

#### • Isotrope Verfestigung

Die ursprüngliche Formulierung des Menegotto-Pinto Gesetzes sah lediglich kinematische Verfestigung ("kinematic hardening") des Bewehrungsstahls vor.

Soll ebenfalls isotrope Verfestigung ("isotropic hardening") berücksichtigt werden, dann kann das Modell nach [FBP83] verwendet werden. Dieses Modell ermöglicht die Berücksichtigung von isotroper Verfestigung, indem die zwei Asymptoten der monotonen Umhüllenden nach jeder Belastungsumkehr um ein Spannungsinkrement  $\Delta\sigma_s$  nach aussen verschoben werden gemäss Gleichungen (67) bis (70).

Das Spannungsinkrement  $\Delta\sigma_s$  ist dabei grundsätzlich eine Funktion der im Laufe der Berechnung maximal erreichten Dehnung ( $\varepsilon_{r,\max}$ ) bzw. Stauchung ( $\varepsilon_{r,\min}$ ).

$$\sigma_s^+(\varepsilon_s) = (1 - b)f_y + bE_s\varepsilon_s + \Delta\sigma_s^+ \quad (67)$$

wobei

$$\Delta\sigma_s^+(\varepsilon_{r,\min}) = f_y \cdot a_3 \left( \left| \frac{\varepsilon_{r,\min}}{\varepsilon_y} \right| - a_4 \right) > 0 \quad (68)$$

und

$$\sigma_s^-(\varepsilon_s) = -(1 - b)f_y + bE_s\varepsilon_s - \Delta\sigma_s^- \quad (69)$$

wobei

$$\Delta\sigma_s^-(\varepsilon_{r,\max}) = f_y \cdot a_3 \left( \frac{\varepsilon_{r,\max}}{\varepsilon_y} - a_4 \right) > 0 \quad (70)$$

Der Parameter  $a_3$  definiert die Grösse des Spannungsinkrementes und der Parameter  $a_4$  bestimmt, ab welcher Dehnung die isotrope Verfestigung beginnt.

Die numerischen Werte beider Parameter werden am besten von Fall zu Fall an Versuchen kalibriert, weil sie von der Art des geprüften Bewehrungsstahls stark abhängig sind. In der Literatur werden oft folgende Werte verwendet ([MN92], [FBP83]):

$$a_3 = 0.010 \dots 0.025 \quad , \quad a_4 = 3 \dots 7 \quad (71)$$

#### • Ausknicken der Bewehrungsstäbe

Falls der Einfluss der Druckinstabilität der Bewehrungsstäbe (Knicken) auf ihre Spannungs-Dehnungs-Beziehung berücksichtigt werden soll, dann kann zum Beispiel das Monti-Nuti Gesetz beigezogen werden [MN92].

## Beton

In der Literatur sind detaillierte analytische Modelle zur Beschreibung des tatsächlichen Verhaltens von Beton unter zyklischer Belastung zu finden. Eine der ersten Arbeiten in diesem Gebiet ist Karsan und Jirsa zu verdanken [KJ69].

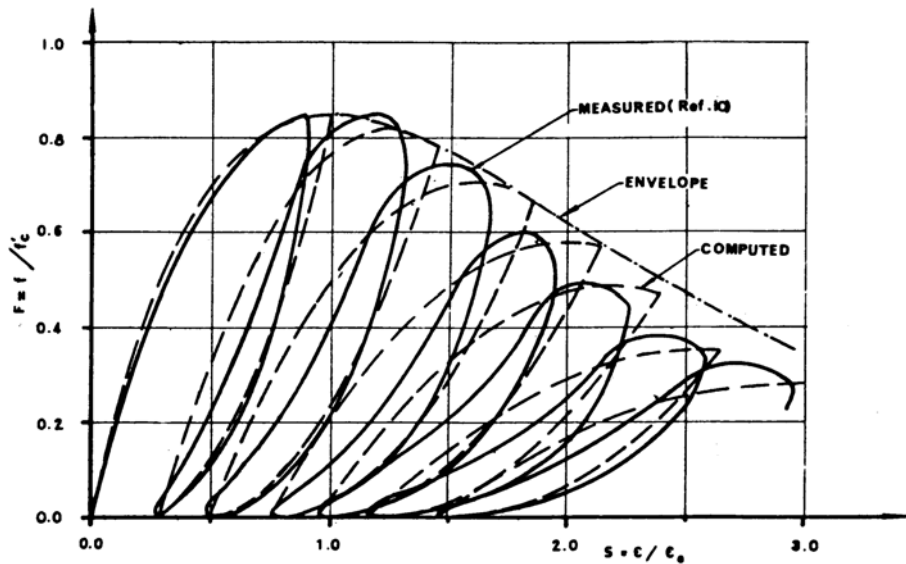


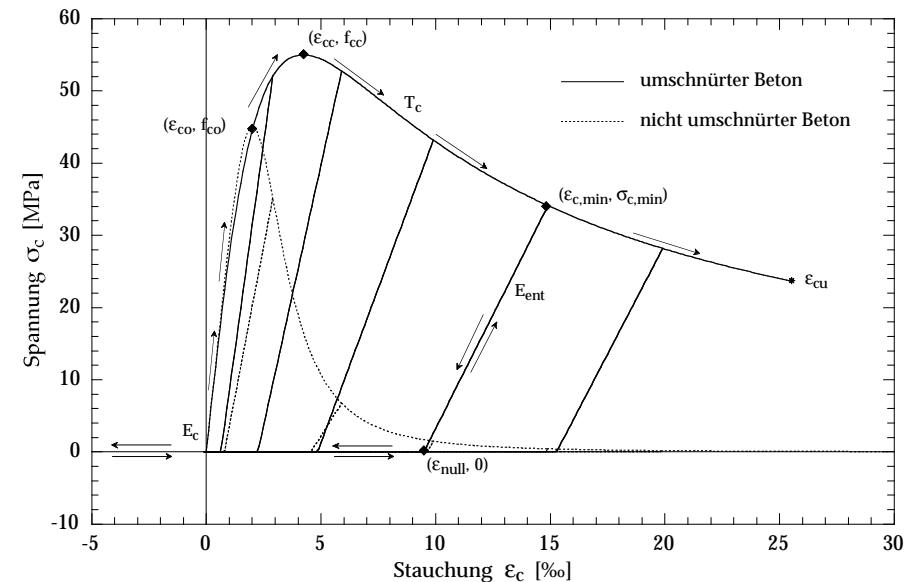
Bild aus [KJ69]

In vielen Computerprogrammen sind aber vereinfachte Versionen von solchen Modellen implementiert, um eine bessere numerische Stabilität des Elements zu gewährleisten.

In der Folge wird ein vereinfachtes zyklisches Materialgesetz beschrieben, das auf den Modellen von Mander basiert ([Man84] und [MPP88], siehe auch "Erdbebensicherung von Bauwerken I" Abschnitt 7.1.1). Um den Rechenaufwand zu reduzieren und die Stabilität des Elements zu verbessern werden folgende Annahmen eingeführt:

- die Zugfestigkeit  $f_{ct}$  des Betons wird vernachlässigt.
- eine Entlastung und die darauffolgende Wiederbelastung erfolgen entlang der gleichen Geraden, d.h. ohne hysteretische Energiedissipation. Diese Annahme ist vor allem bei Erdbebeneinwirkung sicher gerechtfertigt, weil grosse Stauchungen nur während wenigen und sehr kurzen Zeitperioden auftreten.

Dreidimensionale Effekte im Druckbereich des Betons infolge Umschnürung werden berücksichtigt, indem die Parameter, die die monotone Umhüllende beschreiben, modifiziert werden.



Die Beziehung, die das zyklische Verhalten des Betons beschreibt, ist im vorherigen Bild dargestellt und besteht aus folgenden vier Regeln:

- 1) Erstbelastung auf der monotonen Umhüllenden, die durch Gleichung (72) definiert ist. Gleichzeitig wird das Tangentenmodul  $T_c(\epsilon_c)$  mit Gleichung (74) berechnet.

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \frac{f_{cc} \cdot r \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)}{r - 1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^r} \quad (72)$$

wobei:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \cdot \left[1 + 5 \cdot \left(\frac{f_{cc}}{f_{co}} - 1\right)\right] \quad , \quad r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad , \quad E_{sec} = \frac{f_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \quad (73)$$

mit den Parametern:

$f_{co}$  = Druckfestigkeit des nicht umschnürten Betons; entspricht erfahrungsgemäss der Zylinderdruckfestigkeit  $f_c$ .

$\varepsilon_{co}$  = Stauchung beim Erreichen der Druckfestigkeit  $f_{co}$ . Beträgt im Allgemeinen 0.002.

$f_{cc}$  = Druckfestigkeit des umschnürten Betons. Siehe "Erdbebensicherung von Bauwerken I" Abschnitt 7.1.1.

$$T_c(\varepsilon_c) = \frac{d\sigma_c}{d\varepsilon_c} = \frac{f_{cc} \cdot r}{\varepsilon_{cc} \cdot \left[r - 1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^r\right]} - \frac{f_{cc} \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^{r-1}}{\varepsilon_{cc} \cdot \left[r - 1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^r\right]^2} \quad (74)$$

2) Entlastung entlang der Geraden zwischen den Punkten  $(\varepsilon_{c,min}, \sigma_{c,min})$  und  $(\varepsilon_{c,null}, 0)$  mit Modul  $E_{ent}$ . Die Dehnung  $\varepsilon_{c,null}$  wird mit Gleichung (75) bestimmt.

$$\varepsilon_{c,null} = \varepsilon_{c,min} - \frac{(\varepsilon_{c,min} + \varepsilon_a) \cdot \sigma_{c,min}}{\sigma_{c,min} + E_c \cdot \varepsilon_a} \quad (75)$$

wobei:

$$\varepsilon_a = a \cdot \sqrt{\varepsilon_{c,min} \cdot \varepsilon_{cc}} \quad \text{mit} \quad a = \max\left\{\frac{\varepsilon_{c,min}}{\varepsilon_{cc} + \varepsilon_{c,min}}, \frac{0.09 \cdot \varepsilon_{c,min}}{\varepsilon_{c,min}}\right\} \quad (76)$$

Anschliessend kann  $E_{ent}$  mit Gleichung (77) berechnet werden:

$$E_{ent} = \frac{\sigma_{c,min}}{\varepsilon_{c,min} - \varepsilon_{c,null}} \quad (77)$$

3) Die Spannung Null wird bei  $(\varepsilon_{c,null}, 0)$  erreicht, anschliessend wird entlang der X-Achse weiterentlastet.

4) Wiederbelastung entlang der X-Achse, bis die Stauchung  $\varepsilon_{c,null}$  erneut erreicht wird; dann Wiederbelastung entlang der Geraden mit Modul  $E_{ent}$  bis  $\varepsilon_{c,min}$ , anschliessend Weiterbelastung auf der monotonen Umhüllenden gemäss Gleichung (72).

Das zyklische Verhalten von umschnürtem und nicht umschnürtem Beton kann durch die gleichen Beziehungen beschrieben werden, indem für nicht umschnürten Beton  $f_{cc} = f_{co}$  gesetzt wird.

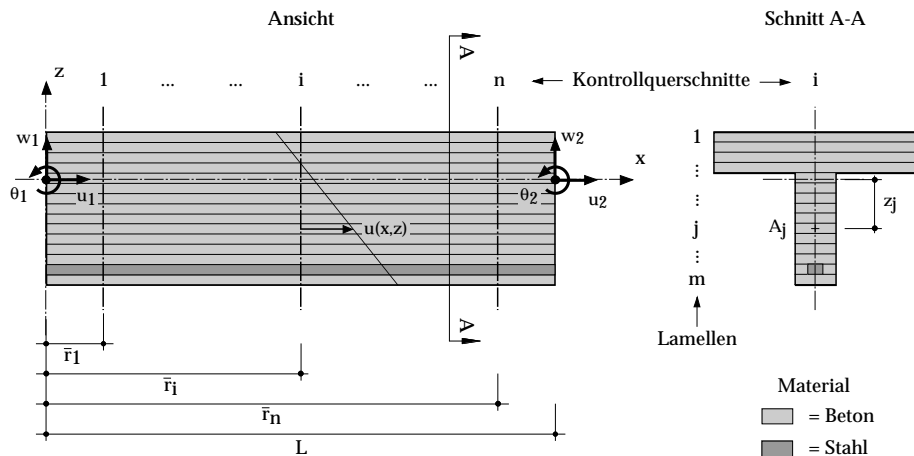
### 2.3.3 Elemente mit verteilter Plastizität

Elemente mit verteilter Plastizität sind Elemente, die an "beliebigen" Orten entlang des Elements inelastische Verformungen beschreiben können.

Häufig verwendete Elemente mit verteilter Plastizität sind die sogenannten Faserelemente ("Fibre elements").

Als Beispiel für ein Faserelement wird hier ein zweidimensionales 2-Knoten Balkenelement diskutiert. Für dieses Element wird eine Steifigkeits-Formulierung gewählt.

Der Kraft-Verformungs-Zustand des Elements wird berechnet indem aus der bekannten Knotenverschiebung via Ansatzfunktionen Dehnungen in den Fasern bestimmt werden. Aus den Materialgesetzen (siehe Abschnitt 2.3.2) werden die entsprechenden Spannungen herausgelesen. Aus der Integration der Spannungen über den Querschnitten und entlang des Elements werden die unbekannt Knotenkräfte bestimmt.



Die sechs Freiheitsgrade des Elements sind im Vektor  $U^{(m)}$  zusammengefasst:

$$U^{(m)} = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2] \quad (78)$$

Die Verformungen  $u(x,z)$  entlang des Elements werden nach [Bat96] durch kubische hermitesche Polynome approximiert und können mit Gleichung (79) berechnet werden.

$$u(x,z) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{6z}{L}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)w_1 - z\left(1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}\right)\theta_1 + \frac{x}{L}u_2 - \frac{6z}{L}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)w_2 + z\left(2\frac{x}{L} - 3\frac{x^2}{L^2}\right)\theta_2 \quad (79)$$

Die Dehnungen  $\varepsilon(x,z)$  entlang des Elements ergeben sich durch Ableiten der Gleichung (79) nach  $x$ . Unter Berücksichtigung von Gleichung (78) werden sie:

$$\varepsilon(x,z) = \frac{du}{dx} = \mathbf{B}^{(m)}U^{(m)} \quad (80)$$

mit

$$\mathbf{B}^{(m)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{6z}{L}\left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2}\right) \\ -z\left(-4\frac{1}{L} + 6\frac{x}{L^2}\right) \\ \frac{1}{L} \\ -\frac{6z}{L}\left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2}\right) \\ z\left(2\frac{1}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \end{bmatrix} \quad (81)$$

wobei  $\mathbf{B}^{(m)}$  die "strain-displacement matrix" des Elements ist.

Die Krümmung  $\phi(x)$  entlang des Elements kann aus der Ableitung nach  $z$  der Dehnungen  $\varepsilon(x,z)$  berechnet werden.

$$\phi(x) = \frac{d\varepsilon}{dz} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{L}\left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2}\right) \\ 4\frac{1}{L} - 6\frac{x}{L^2} \\ 0 \\ -\frac{6}{L}\left(\frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2}\right) \\ 2\frac{1}{L} - 6\frac{x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U}^{(m)} \quad (82)$$

Der Verlauf der Krümmung entlang des Elements ist **linear**. Diese Eigenschaft der Krümmung soll bei der Diskretisierung von Tragwerken berücksichtigt werden.

Die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{(m)}$  des Elements kann dann mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit wie üblich berechnet werden:

$$\mathbf{K}_T^{(m)} = \int_V \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV \quad (83)$$

Die Materialgesetze, die durch  $\mathbf{D}^{(m)}$  beschrieben werden, sind nichtlinear und können für alle Lamellen verschieden sein. Deshalb muss Gleichung (83) numerisch über alle  $j = 1 \dots m$  Lamellen und über alle  $i = 1 \dots n$  Kontrollquerschnitte integriert werden, am Besten mit einer der Integrationsformeln nach Gauss [Bat 96].

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{(m)}$  wird durch Gleichung (84) gegeben, wobei  $A_j$  die Fläche und  $T_{ij}$  der Tangentenmodul der Lamelle sind und  $\bar{\alpha}_i$  und den  $\bar{r}_i$  Integrationsfaktoren nach Gauss entsprechen.

$$\mathbf{K}_T^{(m)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_i A_j \frac{T_{ij}}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{6z_j(1-\frac{\bar{r}_i}{L})}{L} \\ z_j(4-6\frac{\bar{r}_i}{L}) \\ 1 \\ -\frac{6z_j(1-\frac{\bar{r}_i}{L})}{L} \\ \frac{z_j(2-6\frac{\bar{r}_i}{L})}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{6z_j(1-\frac{\bar{r}_i}{L})}{L} \\ z_j(4-6\frac{\bar{r}_i}{L}) \\ 1 \\ -\frac{6z_j(1-\frac{\bar{r}_i}{L})}{L} \\ \frac{z_j(2-6\frac{\bar{r}_i}{L})}{L} \end{bmatrix} \quad (84)$$

Wenn die Integration von 0 bis L anstatt wie üblich von -1 bis +1 durchgeführt wird, dann müssen die Integrationsfaktoren folgendermassen umgeformt werden:

$$\bar{r}_i = \frac{(1+r_i)}{2} \cdot L \quad , \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i \cdot \frac{L}{2} \quad (85)$$

Die internen Elementkräfte  $\mathbf{F}^{(m)}$  werden auch wie üblich mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit bestimmt und ebenfalls numerisch integriert:

$$\mathbf{F}^{(m)} = \int_V \mathbf{B}^{(m)T} \sigma dV \quad (86)$$

bzw.

$$\mathbf{F}^{(m)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\bar{\alpha}_i A_j}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 6z_j \left(1 - 2\frac{\bar{r}_i}{L}\right) \\ L \\ z_j \left(4 - 6\frac{\bar{r}_i}{L}\right) \\ 1 \\ -6z_j \left(1 - 2\frac{\bar{r}_i}{L}\right) \\ L \\ z_j \left(2 - 6\frac{\bar{r}_i}{L}\right) \end{bmatrix} \sigma_{ij} \quad (87)$$

wobei  $A_j$  die Fläche und  $\sigma_{ij}$  die Spannung der Lamelle sind.

Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  und das Tangentenmodul  $T_{ij}$  der Lamelle werden in Funktion der vorhandenen Dehnungen  $\varepsilon(x,z)$  in der Lamelle mit Hilfe der konstitutiven Gesetze aus Abschnitt 2.3.2 bestimmt.

## Bemerkungen zu den Faserelementen

- Faserelemente können entweder anhand einer **Steifigkeits-Formulierung** ("Stiffness-Formulation" oder "Displacement-Formulation") oder anhand einer **Nachgiebigkeits-Formulierung** ("Flexibility-Formulation" oder "Force-Formulation") implementiert werden.
- Zur Analyse von plastifizierenden Tragwerken sind Elemente mit einer Nachgiebigkeits-Formulierung eigentlich besser geeignet als Elemente mit einer Steifigkeits-Formulierung. Die Implementierung der Nachgiebigkeits-Formulierung ist aber wesentlich anspruchsvoller und kann hier nicht diskutiert werden. Für weitere Details siehe z.B. [TSF91] oder Kapitel 6 von [BB04]
- Es gibt verhältnismässig wenige FE-Programme, bei welchen Faserelemente mit Nachgiebigkeits-Formulierung implementiert sind (z.B. Opensees, [MMF05]), und dort erweist sich die Verwendung von solchen Elementen oft als heikel (Konvergenzprobleme).
- Bei vielen FE-Programmen (z.B. Seismostruct, [Sei07]) stehen nur Faserelemente mit Steifigkeits-Formulierung zur Verfügung. Die Verwendung von solchen Elementen ist nicht ganz unproblematisch und soll hier kurz diskutiert werden.
- Die gewöhnlichsten Faserelemente mit Steifigkeits-Formulierung weisen folgende Eigenschaften auf:
  - Die Ansatzfunktionen sind kubisch, was zu einer linearen Krümmung entlang des Elements führt (siehe Gleichung (82)). In plastifizierenden Bereichen von Tragwerken kann die Krümmung stark nichtlinear sein. Aus diesem Grund kann eine feine Diskretisierung des Bauteils notwendig sein.
  - Das Gleichgewicht auf Niveau der Kontrollquerschnitte (Gauss-Punkte) wird nicht kontrolliert. Aus diesem Grund treten bei den verschiedenen Kontrollquerschnitten ungleiche Längskräfte auf, die das Resultat stark verfälschen können (siehe z.B. [AEM86]). Um diesen Effekt zu reduzieren soll – in den Bereichen der Struk-



tur, wo grosse Nichtlinearitäten zu erwarten sind – eine feine Diskretisierung vorgesehen werden [TSF91].

- Es werden keine Schubverformungen berücksichtigt. Falls Schubverformungen wichtig sind, dann soll eine entsprechende Flexibilität via Schubgelenke eingeführt werden.
- Um die Auswirkung von diesen Eigenschaften zu verdeutlichen, werden nun 5 verschiedene Vergleichsberechnungen durchgeführt und diskutiert. Für alle Berechnungen wurden Faserelemente mit Steifigkeits-Formulierung und 2 Gauss-Legendre (siehe [Bat96]) Integrationspunkte verwendet.
- Vergleichsberechnung Nr. 1 (siehe Seite 118)
  - Bei 5 Kragarmen wird der Einfluss der Länge des Elements im plastischen Gelenk untersucht.
  - Im “elastischen” Bereich hat die Diskretisierung praktisch keinen Einfluss.
  - Die Verkürzung des Elements im plastischen Gelenk führt zu einer Reduktion des Widerstands. Beim “Fall V001” ist der Widerstand am grössten, weil die dabei entstehenden Längskräfte am grössten sind. Beim unteren Integrationspunkt wird die Normalkraft negativer, was zu einer Erhöhung des Widerstands führt.
  - Beim “Fall V005” beträgt die maximal erreichte Verformung zirka 7.5 cm. Danach konvergiert die Berechnung nicht mehr, weil die Dehnungen in den Materialfasern zu gross sind.

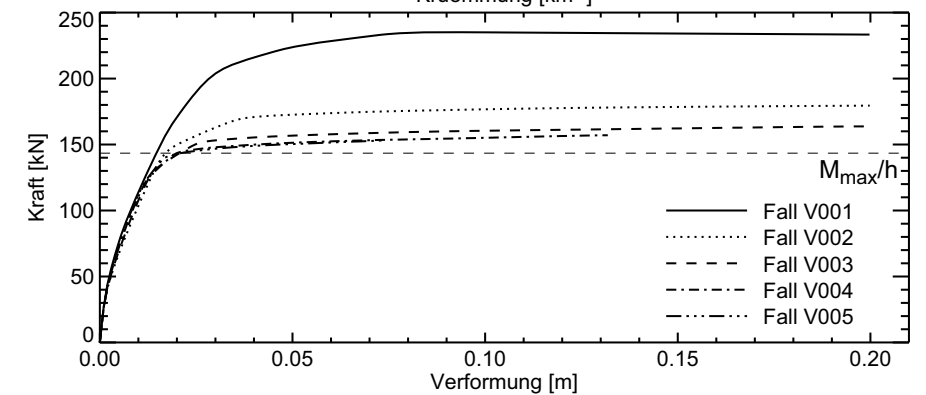
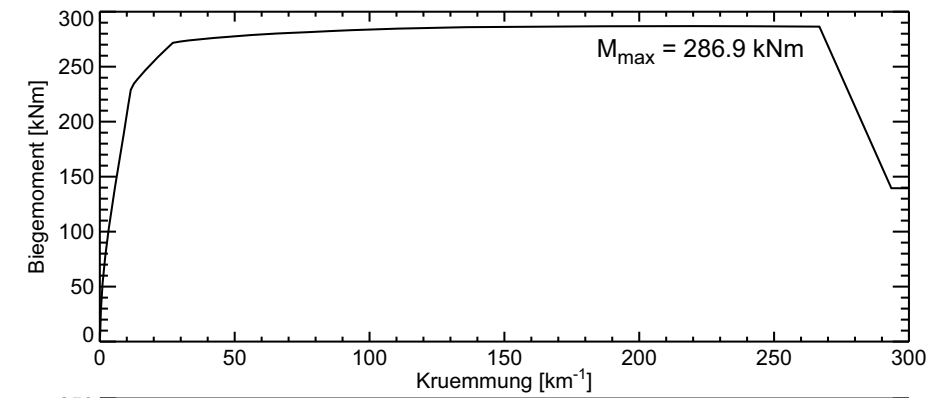
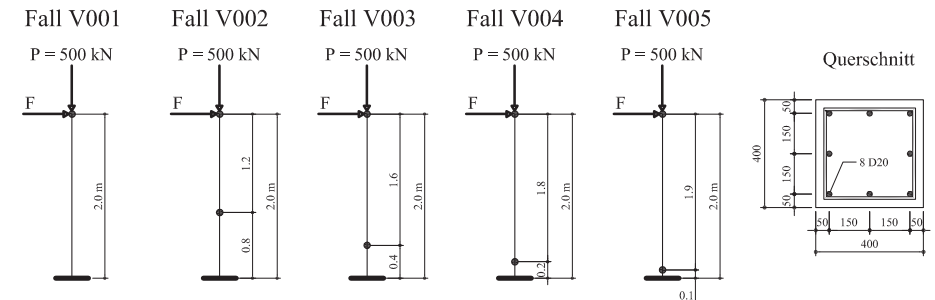
- Vergleichsberechnung Nr. 2 (siehe Seite 119)
  - Bei 5 Kragarmen wird der Einfluss der Diskretisierung im plastischen Gelenk untersucht.
  - Die Erhöhung der Anzahl Elemente führt zu einer nur geringfügigen Erhöhung der maximal erreichten Verformung.
  - Wegen der hohen Normalkraft, ist die Verfestigung der Momenten-Krümmungs-Beziehung sehr gering. Aus diesem Grund fliesst in allen Fällen praktisch nur das unterste Element und die zusätzlichen Elemente im plastischen Gelenk haben keinen Einfluss.
- Vergleichsberechnung Nr. 3 (siehe Seite 120)
  - Wie Vergleichsberechnung Nr. 1 aber ohne Normalkraft in der Stütze. Die fehlende Normalkraft führt zu einer höheren Verfestigung der Momenten-Krümmungs-Beziehung.
  - “Fall V015” zeigt die kleinste maximal erreichte Verformung und die grösste Verfestigung. Beide Phänomene sind einer Konsequenz der grösseren Dehnungen in den Materialfasern.
- Vergleichsberechnung Nr. 4 (siehe Seite 121)
  - Wie Vergleichsberechnung Nr. 2 aber ohne Normalkraft in der Stütze. Die fehlende Normalkraft führt zu einer höheren Verfestigung der Momenten-Krümmungs-Beziehung.
  - Die Erhöhung der Anzahl Elemente führt zu einer Reduktion der Verfestigung und zu einer Erhöhung der maximal erreichten Verformung.
  - Bei dieser Konfiguration, ist die Verfestigung der Momenten-Krümmungs-Beziehung gross genug, um Plastifizierungen ausserhalb des untersten Elements zu bekommen. Zum Beispiel: Die Plastifizierung des zweiten Elements von unten reduziert die Dehnung im untersten Element.
  - “Fälle V018” und “V019” unterscheiden sich kaum vom “Fall V017”. Dies weil das vierte Element von unten in beiden Fällen kaum plastifiziert.

- Vergleichsberechnung Nr. 5 (siehe Seite 122)
  - Wie Vergleichsberechnung Nr. 1. Es wird aber anstatt einer Stütze eine Wand untersucht (Wand WSH3 aus [DWB99]).
  - Wände sind weniger empfindlich als Stützen in Bezug auf eine Änderung der Normalkraft bei den Integrationspunkten.
  - Aus diesem Grund, ausser für Fall "V021", sind alle Resultate ähnlich und stimmen gut mit den Versuchsergebnissen überein.
- Vergleichsberechnung Nr. 6 (siehe Seite 123)
  - Zyklische Nachrechnung des Versuchs WSH3 aus [DWB99].
  - Die FE-Berechnung stimmt mit dem Versuch recht gut überein. Die Entlastungssteifigkeit des numerischen Modells ist aber wesentlich grösser als beim Versuch. Dieser Unterschied lässt sich teilweise anhand der unendlichen Schubsteifigkeit der Faserelemente erklären.

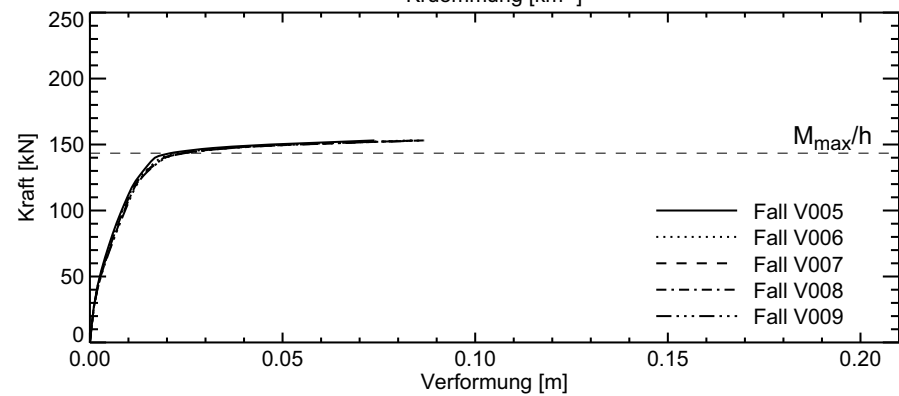
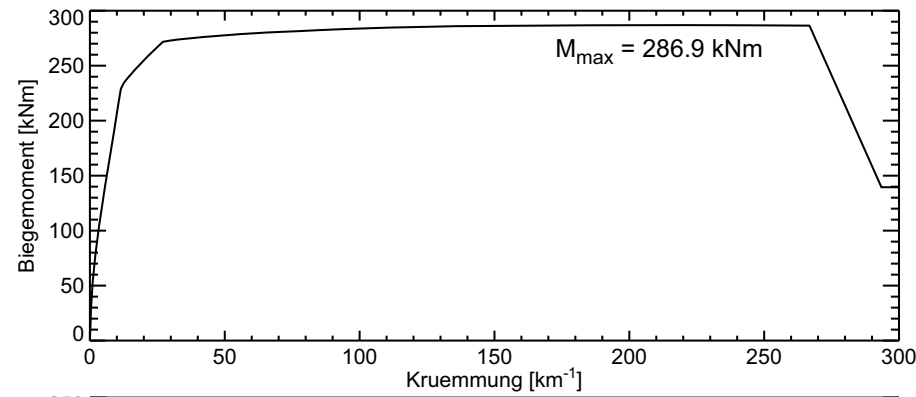
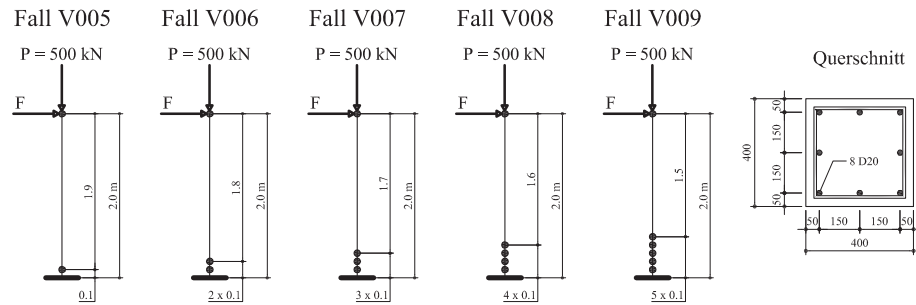
**Fazit**

- Bei Faserelementen mit Steifigkeits-Formulierung können die Resultate der numerischen Analyse stark von der Diskretisierung des Systems abhängig sein. Aus diesem Grund ist die gewählte Diskretisierung immer sorgfältig zu überprüfen.
- Die Dehnungen in den Materialfasern korrelieren typischerweise schlecht mit den Dehnungen, die im Bauteil zu erwarten sind. Aus diesem Grund sollen Versagenskriterien anhand von Knotenverdrehungen und nicht von Materialdehnungen festgelegt werden.

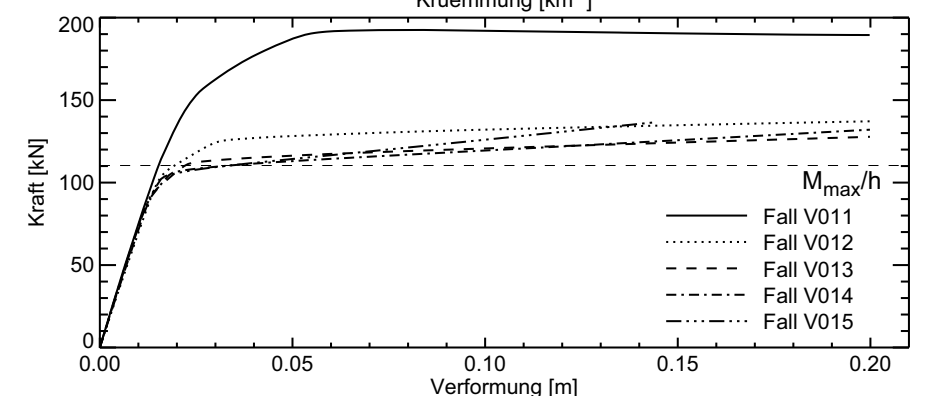
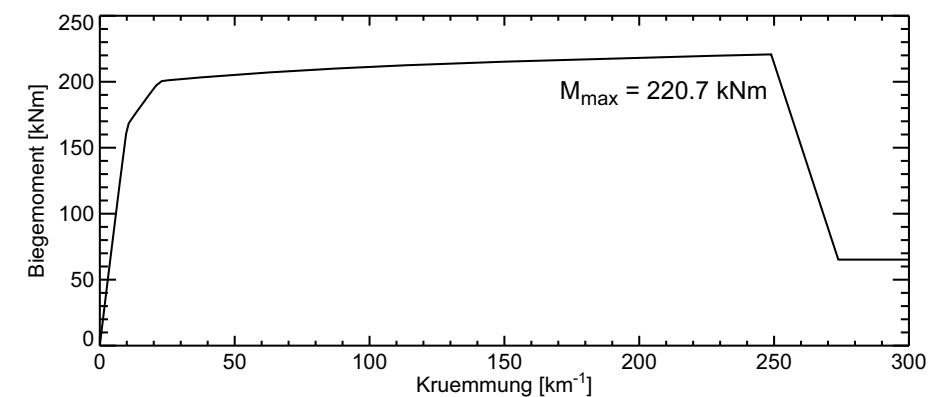
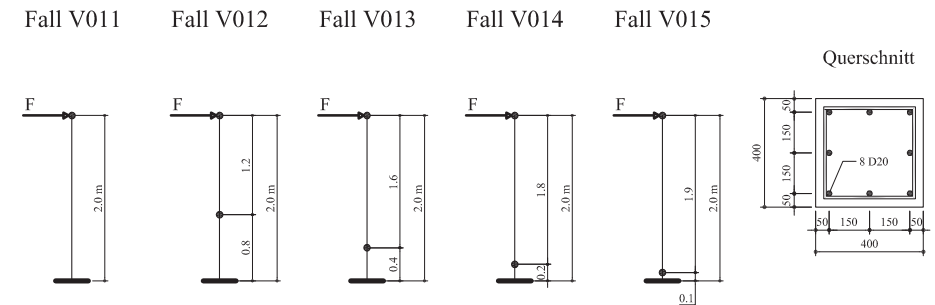
- Vergleichsberechnung Nr. 1: Elementlänge



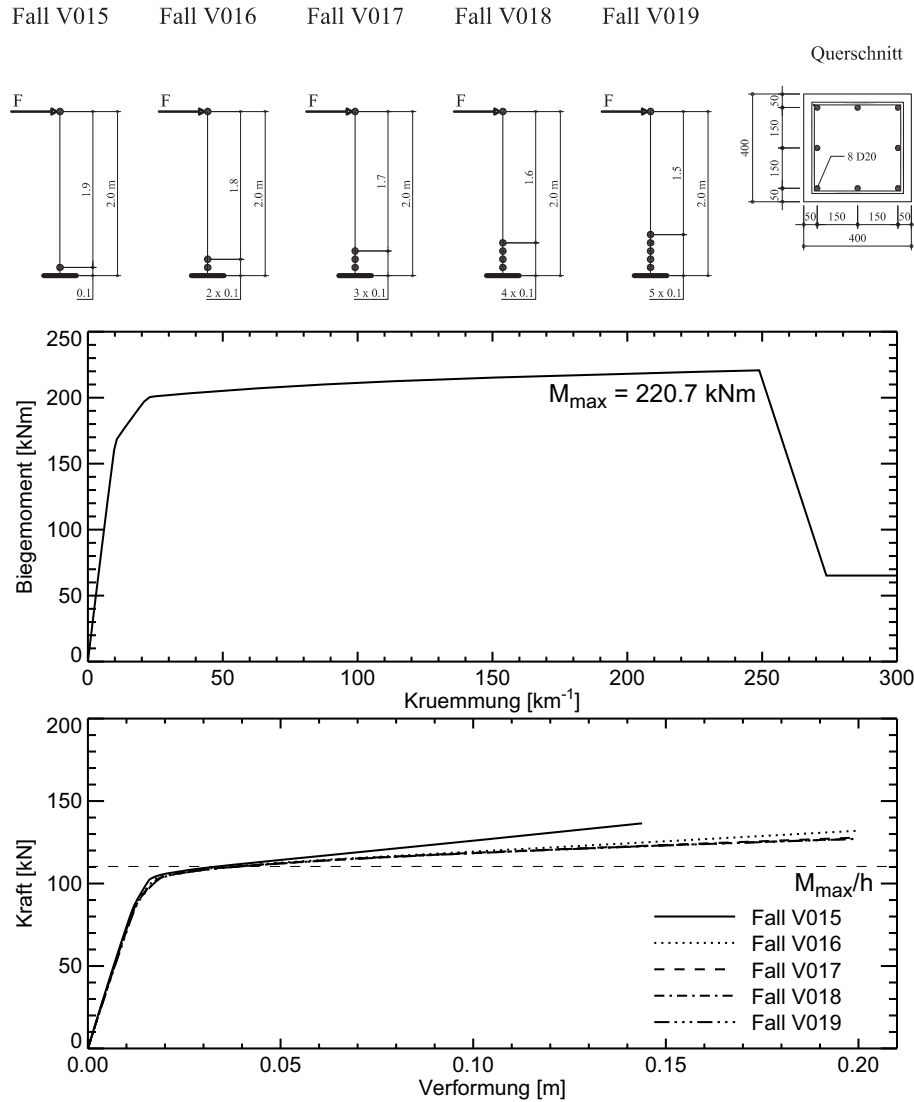
• Vergleichsberechnung Nr. 2: Diskretisierung



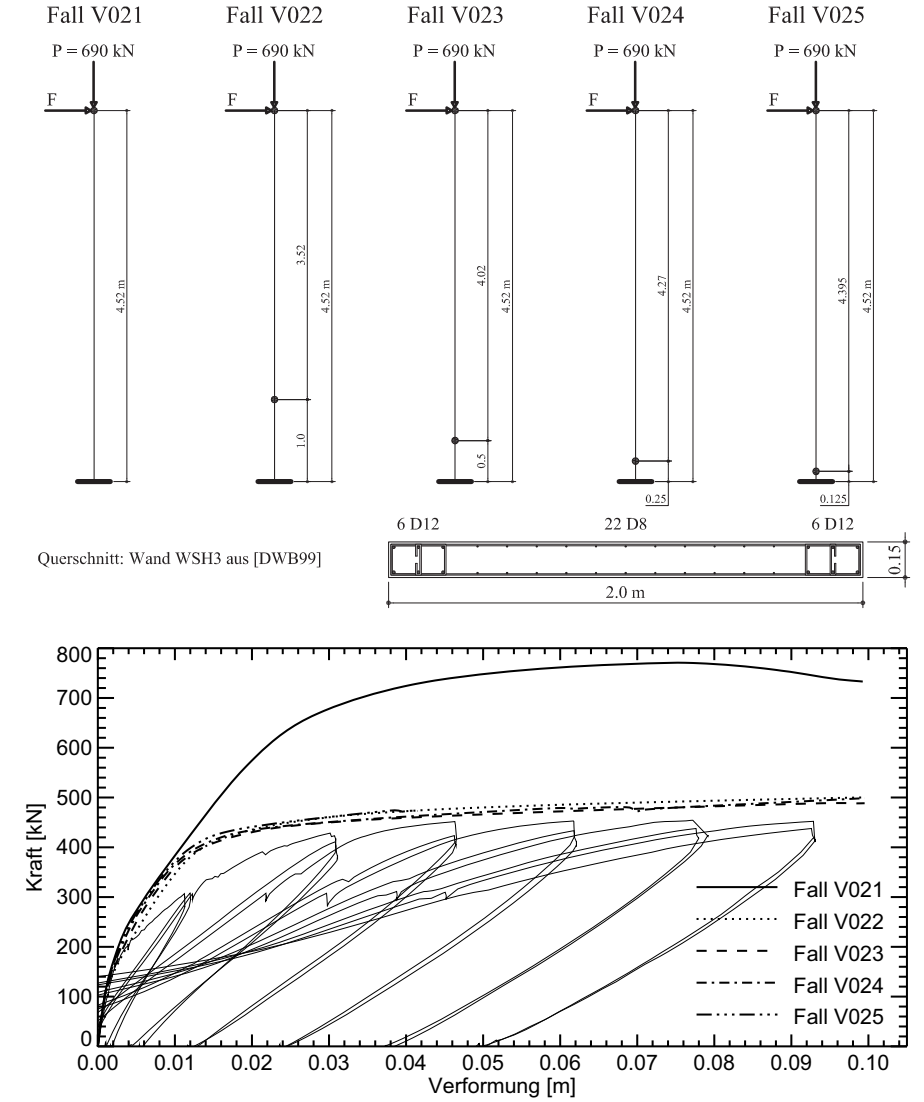
• Vergleichsberechnung Nr. 3: Elementlänge



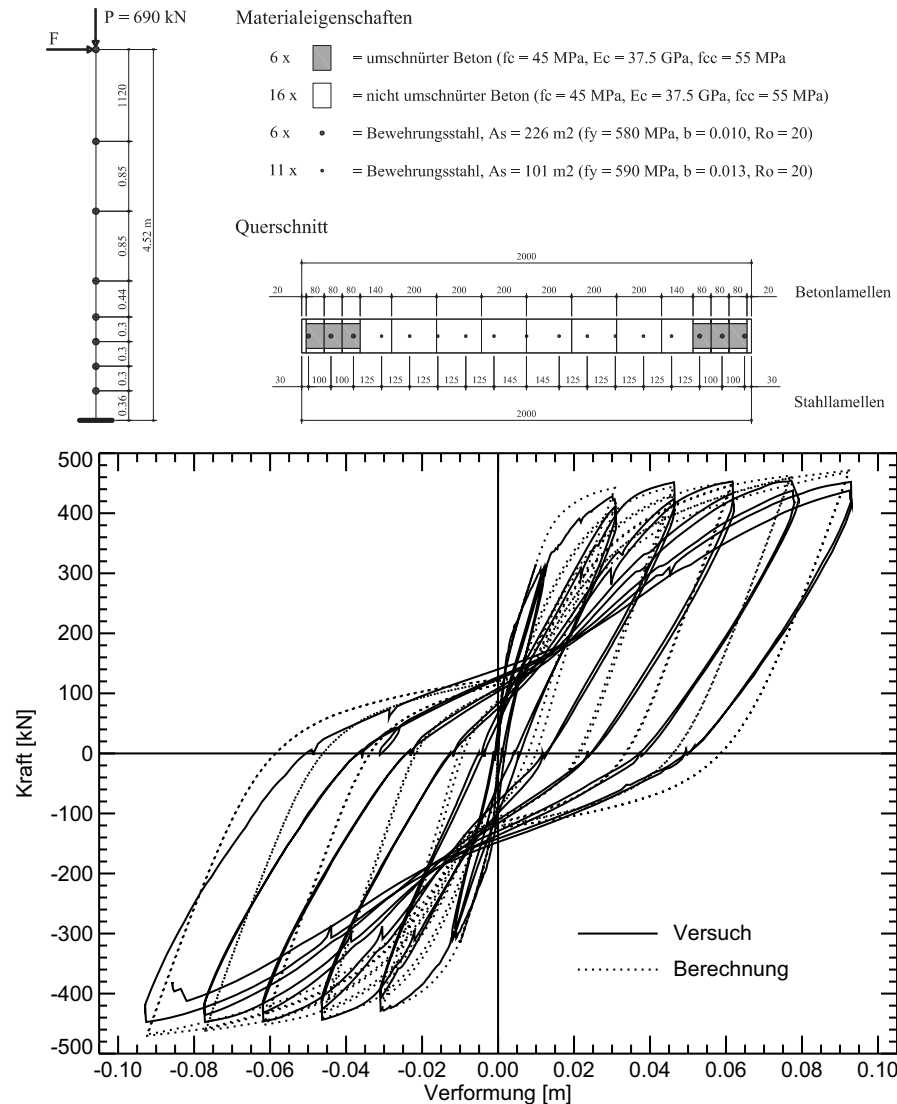
• Vergleichsberechnung Nr. 4: Diskretisierung



• Vergleichsberechnung Nr. 5: Elementlänge



• Vergleichsberechnung Nr. 6: Diskretisierung



2.3.4 Elemente mit konzentrierter Plastizität

Historisch gesehen waren Elemente mit konzentrierter Plastizität die ersten Elemente, die zur Erfassung des inelastischen Verhaltens von Tragwerken entwickelt worden sind.

Die Modellierung mit konzentrierter Plastizität sieht vor, dass die eigentlichen Elemente, die das Tragwerk modellieren – meistens Balkenelemente – immer elastisch bleiben und dass inelastische Verformungen innerhalb von lokalen plastischen Gelenken konzentriert werden.

Die häufigsten Elemente mit konzentrierter Plastizität sind die folgenden zwei Arten:

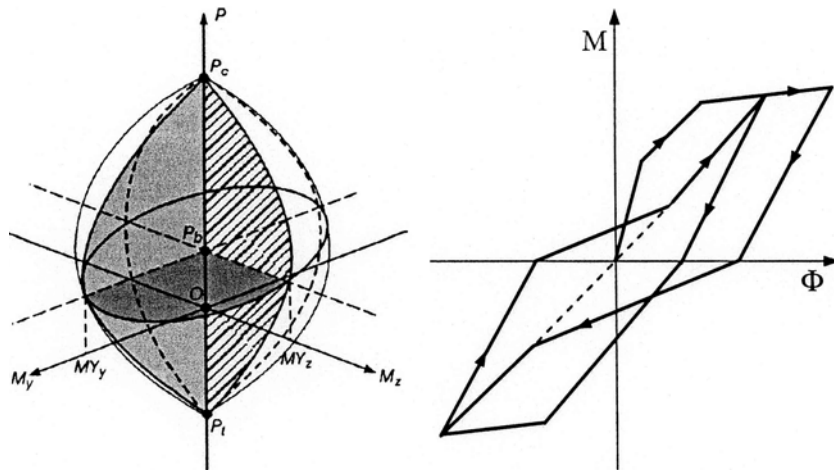
- Balkenelemente mit eingebauten inelastischen Gelenken. Bei solchen Elementen sind die Gelenke in der Regel an den beiden Enden des Elements platziert.
- Federelemente. Diese punktförmigen Elemente übertragen Kräfte und Momente zwischen zwei Tragwerksknoten oder zwischen einer festen Unterlage und einem Tragwerksknoten. Solche Elemente können auch als alleinstehende inelastische Gelenke interpretiert werden, die beliebig in die Struktur eingebaut werden können.

**Bei der Modellierung mit konzentrierter Plastizität ist besonders zu beachten, dass sich inelastische Gelenke dort befinden, wo tatsächlich inelastische Verformungen erwartet werden.** Ansonsten wird das tatsächliche inelastische Verhalten des Systems falsch erfasst.

Eigenschaften der Gelenke

In den meisten Programmen können die Eigenschaften der Gelenke (sowohl als Bestandteil eines Balkenelements als auch als Federelement) auf zwei Arten definiert werden:

- Durch Unterteilung des betrachteten Querschnitts in Fasern und Zuweisung von entsprechenden inelastischen Materialeigenschaften (siehe Abschnitt 2.3.2). Es handelt sich dabei um sogenannte Fasergelenke.
- Durch Beschreibung des hysteretischen Verhaltens anhand von Verhaltensregeln ("Rule Based Models"). Ein Beispiel solcher Verhaltensregeln ist im nächsten Bild gegeben.



Momenten-Krümmungs hysteretisches Verhalten (rechts) und mögliches M-N Interaktionsdiagramm (links). Aus [PPC04]

Bei Fasergelenken und bei den meisten Gelenken, die auf Verhaltensregeln basieren, wird das hysteretische Verhalten des Gelenks als **Momenten-Krümmungs-Beziehung** ( $M/\phi$ ) oder als **Kraft-Dehnungs-Beziehung** ( $F/\epsilon$ ) angegeben.

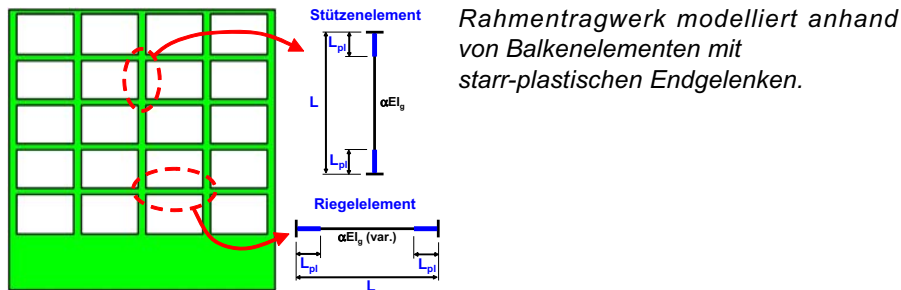
Für die Implementierung in ein Computerprogramm ist aber entweder eine **Momenten-Verdrehungs-Beziehung** ( $M/\theta$ ) oder eine **Kraft-Verformungs-Beziehung** ( $F/\Delta$ ) notwendig.

Die  $M/\theta$ - und  $F/\Delta$ -Beziehungen werden in der Regel aus den  $M/\phi$ - und  $F/\epsilon$ -Beziehungen hergeleitet, indem die Krümmungen bzw. die axialen Dehnungen über die (meistens fiktive) Länge des Gelenks integriert werden.

Bei Stahlbetonbauteilen kann die Länge des Gelenks gleich der Länge  $L_{pl}$  des plastischen Gelenks in der "Plastic Hinge Method" (Siehe "Erdbebensicherung von Bauwerken I" Abschnitt 7.1.5) angenommen werden.

### Bemerkungen zu den Elementen mit konzentrierter Plastizität

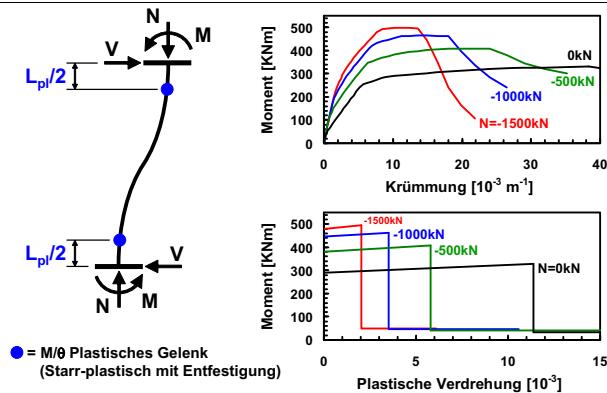
- Bei Gelenken mit Verhaltensregeln muss das hysteretische Verhalten des Gelenks am hysteretischen Verhalten des Bauteils kalibriert werden (siehe bilineare Approximation der Momenten-Krümmungs-Beziehungen bei den Hausübungen). Bei Stahlbetonbauteilen sollen dafür am besten Querschnittsprogramme wie Response-2000 [Ben01] oder USC-RC [ESM01] verwendet werden.
- Bei manchen Implementierungen von Gelenken mit Verhaltensregeln können die elastischen Verformungen unterdrückt werden; d.h. die Gelenke werden als starr-plastisch definiert (siehe Bild auf Seite 127). In solchen Fällen sollen die elastischen Eigenschaften des Elements so gewählt werden, dass sie denen des Bauteils entsprechen.
- Vorteile von Fasergelenken gegenüber Gelenken mit Verhaltensregeln:
  - Bei Fasergelenken ist keine Kalibrierung des hysteretischen Verhaltens notwendig;
  - Eine allfällige M/N-Interaktion ist automatisch erfasst. Bei Gelenken mit Verhaltensregeln wird die M/N-Interaktion – **wenn überhaupt** – anhand von M/N-Interaktionsdiagrammen berücksichtigt (siehe Bild auf Seite 125).



Rahmentragwerk modelliert anhand von Balkenelementen mit starr-plastischen Endgelenken.

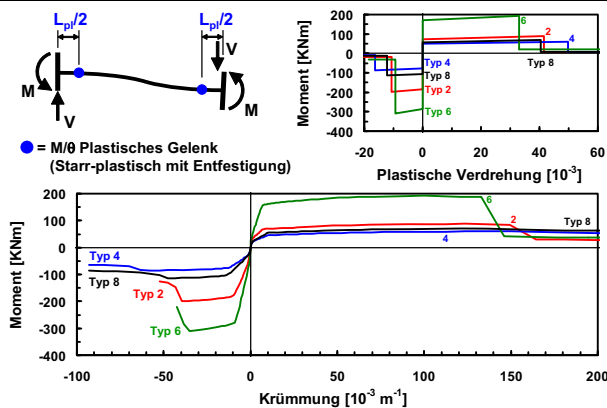
Eigenschaften eines starr-plastischen Stützengelenks

(abhängig von der vorhandenen Normalkraft)



Eigenschaften der starr-plastischen Riegelgelenke

(abhängig vom Riegeltyp)



Definition des hysteretischen Verhaltens von starr-plastischen Gelenken bei einem Rahmentragwerk (oben). Stützengelenke (mitte) und Riegelgelenke (unten). Aus [SIA05].

Diese Vorgehensweise ist vor allen bei zyklischer Belastung nicht unproblematisch und nach der Berechnung soll das erhaltene hysteretische Verhalten des Gelenks auf seine Plausibilität gründlich überprüft werden.

- Vorteile von Gelenken mit Verhaltensregeln gegenüber Fasergelenken:
  - Bei Gelenken mit Verhaltensregeln hat man die Möglichkeit, viele Phänomene zu berücksichtigen, die das Verhalten des Bauteils maßgeblich beeinflussen. Es können hysteretische Gesetze definiert werden, die Phänomene wie Schubverformungen, Schlupf der Bewehrung, Nachgiebigkeit von Rahmenknoten, usw., modellieren. Zum Beispiel das Computerprogramm "RUAUMOKO" [Car04] besitzt 43 unterschiedliche hysteretische Gesetze, die die verschiedensten physikalischen Phänomene beschreiben können. Solche Phänomene, die vor allem bei bestehenden Tragwerken wichtig sein können, können bei Fasergelenken nur sehr schwer berücksichtigt werden.
  - Bei Gelenken mit Verhaltensregeln kann das Biegeverhalten vom axialen Verhalten entkoppelt werden. Diese Möglichkeit kann vor allem bei der Modellierung von Rahmenriegeln vom Vorteil sein.
  - Der numerische Aufwand bei Gelenken mit Verhaltensregeln ist in der Regel wesentlich kleiner als bei Fasergelenken. Aus diesem Grund benötigen solche Modelle weniger Speicherplatz und Rechenzeit.
- Freeware Computerprogramme, die Elemente mit konzentrierten Plastizität aufführen, sind zum Beispiel "SeismoStruct" [Sei07] (auch wenn dort keine M/N-Interaktion implementiert ist), "OpenSees" [MMF05] und "Drain-2Dx" [PPC93].

### 2.3.5 Lösungsverfahren für nichtlineare Probleme

#### Allgemeine Gleichgewichtsbedingung

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für elastische oder inelastische statische oder dynamische Systeme lautet:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t) \quad (88)$$

Dabei ist  $\mathbf{F}(t)$  der zeitabhängige Vektor der inneren Kräfte aller Freiheitsgrade der Struktur (Knotenkräfte) und  $\mathbf{R}(t)$  der zeitabhängigen Vektor der äusseren Kräfte.

Der Vektor  $\mathbf{F}(t)$  setzt sich aus den Beiträgen der einzelnen Elementen  $\mathbf{F}^{(m)}(t)$  zusammen.  $\mathbf{F}^{(m)}(t)$  ist mit den Elementspannungen äquivalent und kann zum Beispiel bei steifigkeits-formulierten Faserelementen anhand von Gleichung (87) bestimmt werden.

Der Vektor  $\mathbf{R}(t)$  ist aus der Problemstellung bekannt.

#### Nichtlineare statische Analyse

Bei linear-elastischen Systemen können die Knotenkräfte  $\mathbf{F}$  anhand von Gleichung (89) bestimmt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (89)$$

Dabei ist  $\mathbf{U}$  der Vektor der Verschiebungen und  $\mathbf{K}$  ist die Steifigkeitsmatrix der Struktur. Gleichung (88) wird somit zu

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (90)$$

$\mathbf{R}$  ist bekannt und  $\mathbf{K}$  ist aus der Zusammensetzung der Elementsteifigkeitsmatrizen ebenfalls bekannt, damit kann der unbekannte Vektor  $\mathbf{U}$  anhand von Gleichung (91) berechnet werden:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R} \quad (91)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (88) kann anhand von Gleichung (91) nur für linear-elastische Systeme gelöst werden.

Bei inelastischen Systemen, infolge sukzessiver Plastifizierung der Bauteile, ist die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  der Struktur während der Belastungszeit **nicht** konstant.

Aus diesem Grund muss Gleichung (88) **inkrementell** und **iterativ** gelöst werden und zwar wie folgt:

- Die Verschiebungen  ${}^t\mathbf{U}$  zur Zeit  $t$  sind aus dem vorherigen Inkrement bekannt;
- Die Verschiebungen  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$  am Ende des Inkrements  $\Delta t$  werden durch  $n$  Iterationen aus Gleichungen (92) und (93) bestimmt.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1}\Delta\mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{R}^{i-1} \quad (92)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1} + \Delta\mathbf{U}^i \quad (93)$$

Wobei:

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{R}^{i-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} \quad (94)$$

Dabei ist  $\mathbf{K}_T$  die Tangentensteifigkeitsmatrix der Struktur.  $\mathbf{K}_T$  lässt sich aus den lokalen Tangentensteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_T^{(m)}$  der einzelnen Elemente bilden. Zum Beispiel, bei steifigkeits-formulierten Faserelementen kann  $\mathbf{K}_T^{(m)}$  anhand von Gleichung (84) bestimmt werden.

Die tatsächliche Lösung der Gleichgewichtsbedingung (88) wird sehr häufig anhand des von Newton erfundenen numerischen Verfahrens zur iterativen Lösung nichtlinearer Gleichungen oder anhand einer modifizierten Version davon vorgenommen.

Im nächsten Abschnitt wird der sogenannte Newton-Raphson Algorithmus zur Lösung von Gleichung (88) diskutiert.



### Das Newton-Raphson Verfahren

Das Newton-Raphson Verfahren erlaubt die Lösung der Belastung von nichtlinearen Federn mit folgender Gleichgewichtsgleichung:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(t)) = \mathbf{R}(t) \tag{95}$$

Dabei stellt  $\mathbf{F}(\mathbf{U}(t)) = \mathbf{F}(t)$  die interne Federkraft dar, welche eine gegebene nichtlineare Funktion der Verschiebung  $\mathbf{U}(t)$  ist. Die äussere Kraft  $\mathbf{R}(t)$  ist eine gegebene Funktion der Zeit  $t$ .

Für ein System mit einem Freiheitsgrad kann das Newton-Raphson Verfahren anhand des Bilds auf Seite 132 graphisch dargestellt werden.

Das Verfahren umfasst folgende Schritte:

- 0) Die Berechnung wurde bereits bis zum Zeitpunkt  $t$  durchgeführt und das System befindet sich in der Gleichgewichtslage  $({}^t\mathbf{U}, {}^t\mathbf{R})$ ;
- 1) Die Anfangsbedingungen zum Start der Iteration werden festgelegt. Die Iteration wird gestartet mit der Verschiebung, der Tangentensteifigkeit und der inneren Kraft, die sich am Ende des vorherigen Zeitschritts ergeben haben. Die externe Belastung  ${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{R}^0$  im Inkrement wird anhand von Gleichung (99) bestimmt.

Verschiebung:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^0 = {}^t\mathbf{U} \tag{96}$

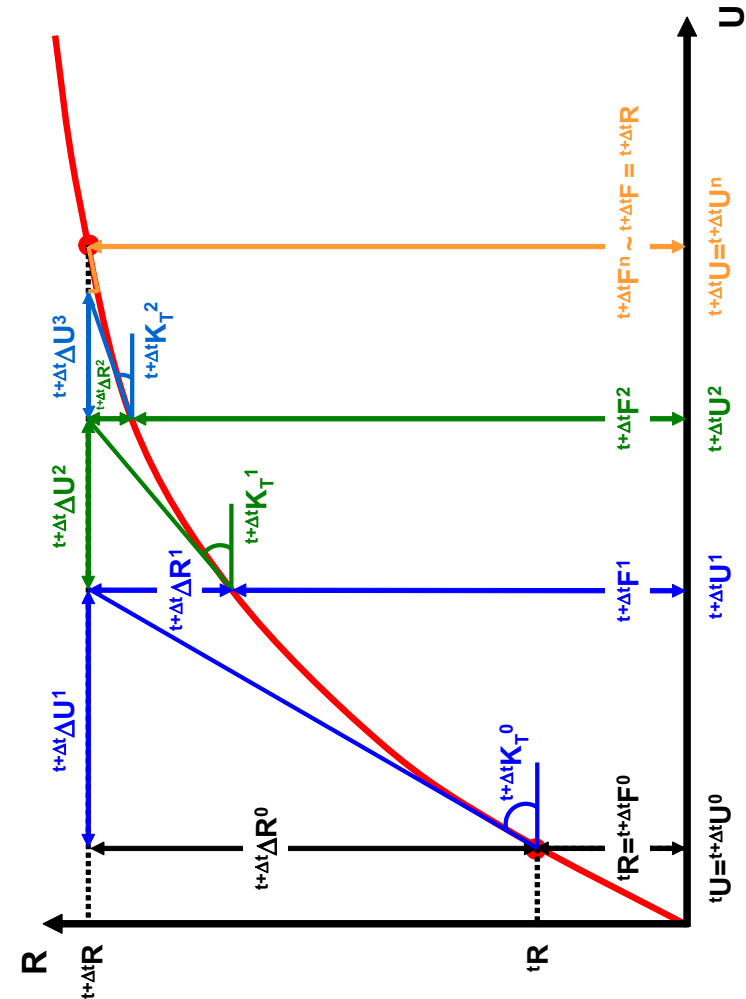
Tangentensteifigkeit:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^0 = {}^t\mathbf{K}_T \tag{97}$

Innere Kraft:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^0 = {}^t\mathbf{F} \tag{98}$

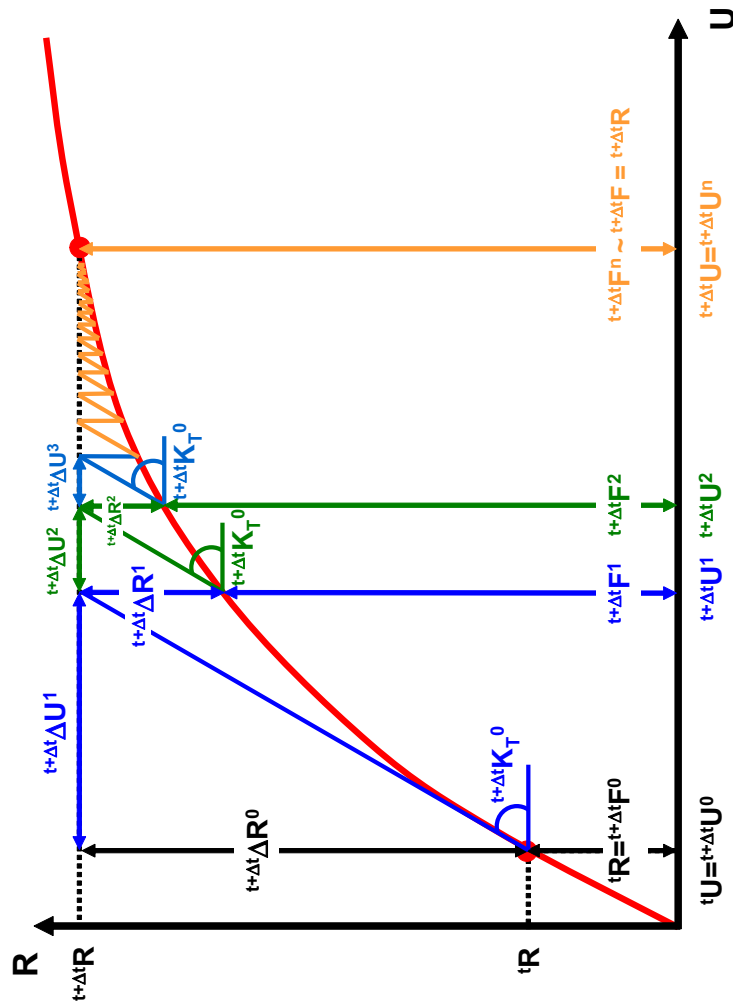
Externe Belastung:  ${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{R}^0 = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^0 \tag{99}$

- 2) Berechnung des  $i^{\text{ten}}$ -Verschiebungsincrement  $\Delta\mathbf{U}^i$  anhand von Gleichung (100) ( $i$  fängt von 1 an).  
Bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden ist  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1}$  eine Matrix (Tangentensteifigkeitsmatrix) und Gleichung (100) wird mit einer  $\mathbf{LDL}^T$ -Zerlegung der Matrix  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1}$  gelöst.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1} \Delta\mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{R}^{i-1} \tag{100}$$



Newton-Raphson Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen (Nach [AEM86])



Modifiziertes Newton-Raphson Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen (Nach [AEM86])

- 3) Berechnung der Verschiebung  ${}^{t+\Delta t}U^i$  am Ende des  $i^{\text{ten}}$ -Inkrementes
 
$${}^{t+\Delta t}U^i = {}^{t+\Delta t}U^{i-1} + \Delta U^i \quad (101)$$
- 4) Berechnung der inneren Kraft  ${}^{t+\Delta t}F^i$  und der neuen Belastung (Residualkraft)  ${}^{t+\Delta t}\Delta R^i$ 

$${}^{t+\Delta t}\Delta R^i = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^i \quad (102)$$
- 5) Sind  $\Delta U^i$  und/oder  ${}^{t+\Delta t}\Delta R^i$  vernachlässigbar klein, dann weiter mit Schritt 7);
- 6) Bestimmung der neuen Tangentensteifigkeit  ${}^{t+\Delta t}K_T^i$  und Wiederholung ab Schritt 2);
- 7) Falls noch nicht die Endzeit erreicht wurde, neuen Zeitschritt anfangen und ab Schritt 1) die Prozedur wiederholen.

### Bemerkungen zum Newton-Raphson Verfahren

- Das Newton-Raphson Verfahren für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden folgt genau dem gleichen Schema. Es werden lediglich die skalaren Größen durch entsprechende vektorielle Größen ersetzt.
- Neben dem Newton-Raphson Verfahren ("Full Newton-Raphson iteration") wird oft auch das modifizierte Newton-Raphson Verfahren ("Modified Newton-Raphson iteration") verwendet. Dieses Verfahren ist im Bild auf Seite 133 dargestellt.
  - Im Gegensatz zum Newton-Raphson Verfahren wird beim modifizierten Newton-Raphson Verfahren die Tangentensteifigkeitsmatrix  $K_T$  des Systems nur ein Mal am Anfang des Zeitschritts bestimmt und im Laufe der Iterationen konstant gehalten.
  - Bis zum Erreichen der Zielverschiebung  ${}^{t+\Delta t}U$  sind beim modifizierten Verfahren mehr Iterationen als beim Newton-Raphson Verfahren notwendig. Diese können aber schneller durchgeführt werden, weil die ständige Aktualisierung von  $K_T$  (Schritt 6) und vor allem seine  $LDL^T$ -Zerlegung (Schritt 2) entfallen. Dies kann

vor allem bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden von Vorteil sein.

- In den meisten FE-Programmen sind oft Lösungsstrategien implementiert, die beide Newton-Raphson Verfahren sowie weitere Verfahren kombinieren, um möglichst sicher zu einem erfolgreichen Abschluss des Iterationsprozess zu kommen.
- Weitere Verfahren zur Lösung von Gleichgewichtsgleichungen sind in den Kapiteln 8 (statische Analyse) und 9 (dynamische Analyse) von [Bat96] zu finden.

### Konvergenzkriterien

- Eine ausführliche Diskussion über Konvergenzkriterien ist sowohl in [Bat96] und [AEM86] zu finden. Hier wird lediglich ein kurzer Überblick gegeben.
- Beim Schritt 5) werden Kriterien benötigt, um die Konvergenz der Iterationen zu beurteilen. Mögliche Konvergenzkriterien können auf **Verschiebung**-, **Kraft**- oder **Energie**-Betrachtungen basieren.
- Da innerhalb eines Zeitschritts die unbekannte Zielverschiebung  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$  gesucht wird, ist es sinnvoll zu verlangen, dass sie innerhalb einer gegebenen Toleranz auch tatsächlich erreicht wird. Aus diesem Grund ist ein mögliches **Verschiebungskriterium**:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{U}^i\|}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}\|} \leq \varepsilon_D \quad (103)$$

Dabei ist  $\varepsilon_D$  die Verschiebungskonvergenztoleranz.

- Der Vektor  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$  ist eigentlich nicht bekannt und muss deshalb approximiert werden. In der Regel wird dabei  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^i$  im Zusammenhang mit einem genügend kleinen Wert für  $\varepsilon_D$  verwendet.

- Es ist dabei wichtig zu bemerken, dass in gewissen Fällen trotz Erfüllung des Kriteriums (103) die gesuchte Zielverschiebung  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$  noch nicht erreicht ist.
- Dies ist der Fall, wenn die berechneten Verschiebungen während eines Iterationsschritts nur wenig ändern aber diese kleine Änderung sich während vielen Iterationsschritten wiederholt.
- Eine solche Situation ergibt sich vor allem im Zusammenhang mit der Verwendung des modifizierten Newton-Raphson Verfahrens (siehe Seite 133).
- Aus diesem Grund wird dieses Verschiebungskriterium in der Regel mit anderen Kriterien kombiniert.
- Ein **Kraftkriterium**, das die Residualkräfte kontrolliert ist durch Gleichung (104) gegeben.

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^i\|}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}\|} \leq \varepsilon_F \quad (104)$$

Dabei ist  $\varepsilon_F$  die Kraftkonvergenztoleranz, die den Betrag der Residualkräfte nach der  $i^{\text{ten}}$ -Iteration mit dem ersten Lastinkrement im Zeitschritt vergleicht.

- Wie im Fall des bereits diskutierten Verschiebungskriteriums, sollte dieses Kraftkriterium nicht allein verwendet werden, weil in gewissen Fällen, trotz Erfüllung von (104), die gesuchte Zielverschiebung  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$  noch nicht erreicht ist. Dies ist der Fall bei Systemen mit sehr kleiner Verfestigung.
- Das **Energiekriterium** von Gleichung (105) hat den Vorteil, das damit gleichzeitig die Konvergenz der Verschiebungen und der Kräfte kontrolliert werden.

$$\frac{(\Delta\mathbf{U}^i)^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1})}{(\Delta\mathbf{U}^1)^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F})} \leq \varepsilon_E \quad (105)$$

Dabei ist  $\varepsilon_E$  die Energiekonvergenztoleranz, die die Arbeit der Residualkräfte während der  $i^{\text{ten}}$ -Iteration mit der Arbeit der Residualkräfte während der ersten Iteration im Zeitschritt vergleicht.

- Wenn die Toleranzen  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_F$  oder  $\varepsilon_E$  zu gross gewählt werden, dann können fehlerhafte Resultate entstehen, die in den nachfolgenden Schritten zum Divergieren der Lösung führen können.
- Wenn die Toleranzen  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_F$  oder  $\varepsilon_E$  zu klein gewählt werden, dann wird die notwendige Anzahl Iterationen unnötig gross. Die zusätzlich erzielte Genauigkeit ist meistens überflüssig.
- Aus numerischen Gründen können zu kleine Toleranzen die Konvergenz der Iterationen unmöglich machen.
- **Bei stark inelastischen Systemen empfiehlt es sich, die Sensitivität der Resultate auf die verwendeten Konvergenzkriterien und auf die gewählten Toleranzen zu untersuchen.**

### Nichtlineare dynamische Analyse

In Anlehnung an Gleichung (92) lautet die Gleichgewichtsbedingung für eine nichtlineare dynamische Analyse wie folgt:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^i + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^i + (\mathbf{F}^{i-1} + \mathbf{K}_T^{i-1} \Delta \mathbf{U}^i) = \mathbf{R}^{t+\Delta t} \quad (106)$$

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^{i-1} + \Delta \mathbf{U}^i \quad (107)$$

Bei einer Fusspunktanregung mit einer Beschleunigung wird der Vektor der äusseren Kräfte anhand von Gleichung (108) berechnet.

$$\mathbf{R}^{t+\Delta t} = \mathbf{M} \mathbf{1}^{t+\Delta t} a_g \quad (108)$$

Dabei ist  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix der Struktur,  $\mathbf{1}$  der Einheits-Einflussvektor (siehe "Erdbebensicherung von Bauwerken I", Abschnitt 5.2) und  $a_g^{t+\Delta t}$  die Fusspunktbeschleunigung zur Zeit  $t + \Delta t$ .

Die Bewegungsdifferentialgleichung (106) muss wegen der Anregungsart **numerisch** integriert werden und wegen des inelastischen Verhaltens des Systems **iterativ** und **inkrementell** gelöst werden.

Die numerische Zeitintegration von Gleichung (106) wird in vielen Fällen mit den Algorithmen von Newmark ([New 59]) vorgenommen, gemäss welcher die unbekanntes Verschiebungsgrössen zur Zeit  $t + \Delta t$  folgendermassen geschätzt werden:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^t \Delta t + [(1-2\beta) \ddot{\mathbf{U}}^t + 2\beta \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}] \frac{\Delta t^2}{2} \quad (109)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + [(1-\gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}] \Delta t \quad (110)$$

Aus Gleichung (109):

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}^t - \frac{1+2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{U}}^t \quad (111)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (111) in (110):

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{U}}^t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}^t \Delta t \quad (112)$$

Die Ausdrücke für die Verschiebungen, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zur Zeit  $t + \Delta t$  aus den Gleichungen (107), (112) und (111) können in die Differentialgleichung (106) eingesetzt werden, die dann für die einzig verbleibende Unbekannte  $\Delta \mathbf{U}^i$  gelöst werden kann:

$$\left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} \right) \Delta \mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] - \mathbf{C} \left[ \frac{\gamma}{\beta\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1} - {}^t\mathbf{U}) + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \right] \quad (113)$$

oder in kompakter Form:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1} \Delta \mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{i-1} \quad (114)$$

Gleichung (114) entspricht genau Gleichung (92) und wird ebenfalls anhand des Newton-Raphson Verfahrens iterativ gelöst.

Im Rahmen dynamischer Berechnungen berücksichtigen typische Konvergenzkriterien auch die Massenträgheitskräfte und allfälligen Dämpfungskräfte.

Mögliche, oft verwendete Konvergenzkriterien sind:

$$\frac{\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{i-1} - \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{i-1} \|}{\text{RNORM}} \leq \varepsilon_F \quad (115)$$

$$\frac{(\Delta \mathbf{U}^i)^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{i-1} - \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{i-1})}{(\Delta \mathbf{U}^i)^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C} {}^t\dot{\mathbf{U}})} \leq \varepsilon_E \quad (116)$$

wobei

$$\text{RNORM} = \sum m_{ij} \cdot g \quad (117)$$

angenommen wird.

Auch im dynamischen Fall sind andere Konvergenzkriterien möglich und eine entsprechende Diskussion ist ebenfalls in [Bat96] zu finden.

## Bemerkungen zu den Lösungsalgorithmen

- Im Gegensatz zu den Analysen von elastischen Systemen, werden Analysen von inelastischen Systemen oft unterbrochen, bevor der eigentlich erwünschte Belastungs- oder Verformungszustand erreicht wird.
  - Diese Situation äussert sich durch die fehlende Konvergenz des Iterationsvorgangs innerhalb eines Zeitschritts.
- Typische mögliche Ursachen fehlender Konvergenz
  - Die Konvergenztoleranzen wurden zu eng oder zu lose gewählt;
  - Die Einstellung der Parameter des Lösungsalgorithmus sind ungeeignet;
  - Der Lösungsalgorithmus ist ungeeignet.  
Typisches Beispiel: Wenn keine speziellen Vorkehrungen getroffen werden, sind die Algorithmen der Newton Familie nicht in der Lage Systeme zu lösen, bei welchen eine globale Entfestigung stattfindet;
  - Die lokalen Verformungen bei den inelastischen Elementen sind zu gross und die dabei berechneten Knotenkräfte sind unsinnig.  
Typisches Beispiel: Faserelemente, die zu kurz sind (siehe Diskussion zum Abschnitt 2.3.3 auf Seite 114).
- Bei den meisten Computerprogrammen wird von der Benutzerin oder dem Benutzer nicht explizit verlangt, den Lösungsalgorithmus und die zugehörigen Parameter zu wählen, sondern die Berechnungen werden anhand vordefinierter Standardeinstellungen durchgeführt.
- Vor allem beim frühzeitigen Unterbruch des Berechnungsvorgangs ist es aber wichtig, die Einstellungsmöglichkeiten des Programms zu kennen, um möglicherweise Änderungen vorzunehmen.
- In der Regel können folgende Änderungen vorgenommen werden:
  - Die Grösse der Zeitschritte;
  - Die Wahl des Lösungsalgorithmus;

- Bei den Algorithmen der Newton-Familie, wie oft die Tangentensteifigkeitsmatrix neu berechnet werden soll;
  - Die Anzahl Iterationen innerhalb eines Zeitschritts;
  - Die Konvergenzkriterien;
  - Die Toleranzen, die bei den verschiedenen Konvergenzkriterien anzuwenden sind.
- Neben den Verfahren von Newmark, stehen zur Zeitintegration der Bewegungsgleichung (106) viele andere Algorithmen zur Verfügung ("Houbolt Methode", "Wilson  $\theta$  Methode", " $\alpha$ -Methode", usw.). Diese Methoden sind ausführlich in [Bat96] beschrieben. Die " $\alpha$ -Methode" erlaubt in der Lösung zusätzliche numerische Dämpfung einzuführen, was günstig sein kann (siehe Abschnitt 2.3.7). Die " $\alpha$ -Methode" ist ausführlich in [HHT77] beschrieben.
- Wahl der Grösse des Zeitschritts  $\Delta t$  bei **statischen** Berechnungen
- Bei statischen Berechnungen hat die Zeit  $t$  keine physikalische Bedeutung. Aus diesem Grund kann im Prinzip die Grösse des Zeitschritts  $\Delta t$  beliebig gewählt werden.
  - Solange der Algorithmus konvergiert, und der Verlauf der äusseren Lasten richtig erfasst ist, spielt die Grösse des Zeitschritts  $\Delta t$  eine untergeordnete Rolle auf die Genauigkeit der Resultate.
  - Wenn geometrische Nichtlinearitäten betrachtet werden oder wenn die Materialeigenschaften Funktion der Verzerrungsgeschichte sind, dann soll aber auch bei statischen Berechnungen die Grösse des Zeitschritts sorgfältig gewählt werden, um keine falschen Resultate zu bekommen.
  - Die Zeitschrittlänge beeinflusst das Konvergenzverhalten des Algorithmus: für kleine  $\Delta t$  konvergiert der Algorithmus schneller, es sind aber mehr Schritte notwendig.
  - Zeitschritte mit variabler Länge können vorteilhaft sein. Ist das System elastisch oder annähernd elastisch, dann können grosse

- Zeitschritte gewählt werden. Ist das System nahe an seiner Traglast, dann sollten kleinere Zeitschritte gewählt werden.
- Bei gewissen Computerprogrammen (siehe zum Beispiel [HKS03]) wird die Länge des Zeitschritts innerhalb von einem gegebenen Bereich vom Programm selber festgelegt in Abhängigkeit der Konvergenz des Zeitschritts und der dafür notwendigen Iterationen.
- Wahl der Grösse des Zeitschritts  $\Delta t$  bei **dynamischen** Berechnungen
- Ziel von dynamischen Berechnungen ist die Erfüllung der Bewegungsdifferentialgleichung (106) zwischen der Zeit  $t$  und der Zeit  $t + \Delta t$ . Aus diesem Grund spielt die Wahl der Zeitschrittlänge  $\Delta t$  immer eine entscheidende Rolle bei der Genauigkeit der Lösung.
  - Die Genauigkeit der Integration der Bewegungsdifferentialgleichung (106) ist vom gewählten Zeitintegrationsalgorithmus und vom Verhältnis
- $$\frac{\Delta t}{T_n} \quad (118)$$
- abhängig. Wobei  $T_n$  die Eigenperioden des Systems sind. Um die Bewegungskomponenten von hohen Eigenschwingungen korrekt zu erfassen, muss die Zeitschrittlänge  $\Delta t$  daher reduziert werden.
- Bei gewissen Zeitintegrationsalgorithmen kann der Algorithmus instabil werden, wenn die Zeitschrittlänge  $\Delta t$  zu gross ist.
  - Eine vertiefte Diskussion zur Genauigkeit von Zeitintegrationsalgorithmen und über sogenannte "bedingt stabile" Algorithmen ist in [Bat96] zu finden.
  - Beispiel: Der Zeitintegrationsalgorithmus von Newmark mit  $\gamma = 1/2$  und  $\beta = 1/6$  (Lineare Variation der Beschleunigung im Zeitschritt, siehe "Erdbebensicherung von Bauwerken I", Abschnitt 3.1) ist nur stabil wenn

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551 \quad (119)$$

für alle Eigenperioden  $T_n$  des Systems. Bei einem System mit mehreren Freiheitsgraden sind vor allem die oberen Eigenschwingungen problematisch, und es könnten deshalb im Zusammenhang mit diesem Algorithmus sehr kleine Zeitschritte erforderlich sein.

- Aus diesem Grund wird im Erdbebeningenieurwesen eher der "unbedingt stabile" Zeitintegrationsalgorithmus von Newmark mit  $\gamma = 1/2$  und  $\beta = 1/4$  verwendet.

### 2.3.6 Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten

Im Rahmen der geometrischen Nichtlinearitäten werden im Erdbebeningenieurwesen folgende Effekte berücksichtigt:

- Einfluss der im Stabelement vorhandenen initialen Spannungen (Effekte 2. Ordnung)
- Einfluss grosser Elementrotationen

Beide geometrischen Nichtlinearitäten sind voneinander unabhängig und sind ebenfalls von allfälligen materialbedingten Nichtlinearitäten unabhängig.

Die geometrische Form des Stabelements bleibt, trotz grosser Elementrotationen, erhalten, sodass nur infinitesimale Elementverzerrungen berücksichtigt werden müssen.

#### Initiale Spannungen

Der Einfluss initialer Spannungen wird mit Hilfe der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$  berücksichtigt. Bei Stabelementen besteht die initiale Spannung aus der Normalkraft  ${}^{t+\Delta t}N_i$ , die entlang des Elements konstant ist. Diese Normalkraft erzeugt infolge der Elementverschiebungen zusätzliche Kräfte. Diese sind Ablenkkräfte, die nicht aus einer Änderung des Spannungszustandes im Element erzeugt werden, sondern die einzig aus der Änderung der Wirkungsrichtung der Normalkraft resultieren.

Um den Einfluss initialer Spannungen zu berücksichtigen, wird die Gleichgewichtsbedingung auf Niveau der Elemente folgendermassen aufgestellt:

$$(\mathbf{K}_T^{(m)} + \mathbf{K}_G^{(m)})\Delta\mathbf{U}^{(m)} = \Delta\mathbf{F}^{(m)} \quad (120)$$

Die geometrische Steifigkeitsmatrix  $K_G$  für ebene Balkenelemente ist in Gleichung (126) angegeben. Dazu ist zu bemerken, dass Gleichung (127) eine Näherung für  $K_G$  darstellt, die auf der Annahme beruht, dass das Balkenelement keine Biegeverformung aufweist.

Die Verformungen entlang eines Elements sind meistens durch kubische Polynome approximiert, deshalb kann die Krümmung entlang des Elements nur linear variieren. Bei stark plastifizierenden Stahlbetonbauteilen ist aber die Krümmungsverteilung stark nichtlinear, deshalb muss das betrachtete System mit vielen kurzen Elementen diskretisiert werden. Aus diesem Grund ist die Anwendung der Näherungsformel (127) zur Bestimmung von  $K_G$  gerechtfertigt.

Die Herleitung der Koeffizienten der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $K_G$  ist sowohl in [Prz85] als auch in [And93] ausführlich beschrieben.

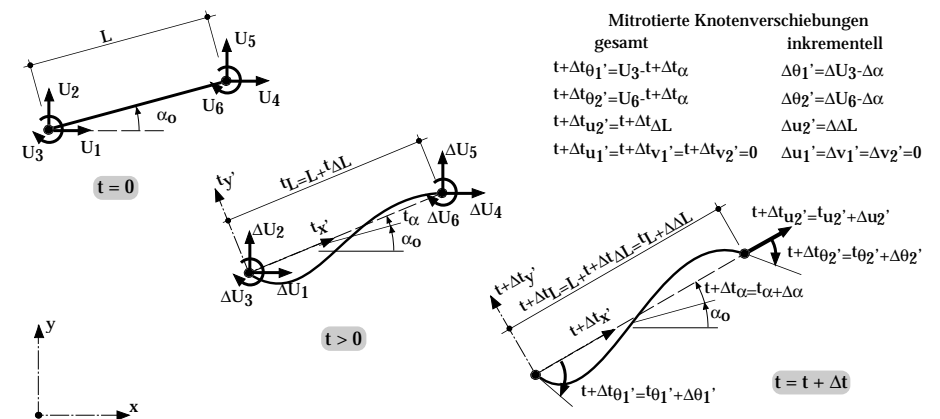
### Grosse Element-Verschiebungen und -Rotationen

Die Hauptaufgabe bei der Erfassung grosser Element-Verschiebungen und -Rotationen besteht darin, die Starrkörperbewegungen des Elements herauszufiltern. D.h. es soll gewährleistet werden, dass Starrkörperbewegungen keine Spannungen im Element erzeugen.

Die Methode der korotierten Koordinaten, die in [AEM86] ausführlich beschrieben wird, erreicht dies durch die Definition eines lokalen  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystems, das mit dem Element bei jeder Gleichgewichtsiteration  $i$  innerhalb eines Zeitschritts  $\Delta t$  mitverschoben und mitrotiert wird.

Das  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem ist im Bild auf Seite 146 dargestellt und wird so definiert, dass die Anfangs- und Endknoten des Elements immer auf der  $x'$ -Achse liegen, und dass der Koordinatennullpunkt beim Anfangsknoten liegt. Im mitrotierten  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem erzeugen nur die relativen Knotenverschiebungen die Spannungen im Element.

Deshalb werden gemäss dem Bild auf Seite 146 aus den globalen Knotenverschiebungen  $U^i$  bzw.  $\Delta U^i$  die entsprechenden mitrotierten lokalen Knotenverschiebungen  $U^{(m)i}$  bzw.  $\Delta U^{(m)i}$  berechnet.



Stabelement mit korotierten lokalen Koordinaten nach [AEM 86]

Die Methode der korotierten Koordinaten hat gegenüber anderen Formulierungen, wie z.B die von Lagrange [BB79], den entscheidenden Vorteil, dass die Elementmatrizen und Elementknotenkräfte zuerst wie im linearen Fall im mitrotierten  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem bestimmt werden. Erst danach werden sie anhand der Rotationsmatrix  $T^{t+\Delta t, i}$  ins globale Koordinatensystem gedreht, um die System-Gleichgewichtsbedingung zu überprüfen.

### Implementierung der geometrischen Nichtlinearitäten

In der Folge wird kurz erläutert, wie die Berücksichtigung von initialen Spannungen und grossen Verformungen in Finite Elemente Programmen bei statischen Analysen und steifigkeitsformulierten Faserelementen implementiert werden kann.

Es ist zu bemerken, dass der Verschiebungsvektor zur Zeit  $t + \Delta t$  anhand der Gleichungen (121) und (128) inkrementell bestimmt wird.

Die System-Gleichgewichtsbedingung wird hingegen anhand von Gleichung (134) mit den gesamten Kräften überprüft.



Bei jedem Zeitschritt  $\Delta t$  werden folgende Schritte durchgeführt:

- 1) Beginn der Newton-Raphson Iteration
- 2) Berechnung des Verschiebungsinkrements  ${}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^i$

$$({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{i-1} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^{i-1}) {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} \quad (121)$$

- 3) Aktualisierung der Rotationsmatrix  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(m)i}$  und Berechnung der lokalen Verschiebungsinkremente  ${}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^{r(m)i}$  im mitrotierten  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(m)i} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (122)$$

mit  $c = \cos(\alpha_0 + {}^{t+\Delta t}\alpha^i)$  und  $s = \sin(\alpha_0 + {}^{t+\Delta t}\alpha^i)$

$${}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^{(m)i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}\Delta U_3^i - {}^{t+\Delta t}\Delta \alpha^i & {}^{t+\Delta t}\Delta \Delta L^i & 0 & {}^{t+\Delta t}\Delta U_6^i - {}^{t+\Delta t}\Delta \alpha^i \end{bmatrix} \quad (123)$$

Dabei sind  $\Delta \alpha^i$  und  $\Delta \Delta L^i$  im Bild auf Seite 146 dargestellt

- 4) Berechnung der Dehnungsincremente  ${}^{t+\Delta t}\Delta \epsilon^i$  im Element

$${}^{t+\Delta t}\Delta \epsilon^i = \mathbf{B}^{(m)} {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^{r(m)i} \quad (124)$$

- 5) Bestimmung des totalen Spannungsincrementes  ${}^{t+\Delta t}\Delta \sigma$  im Zeitschritt  $\Delta t$  aus den Materialgesetzen von Abschnitt 2.3.2 infolge des totalen Dehnungsincrementes  $\sum {}^{t+\Delta t}\Delta \epsilon^i$  im Zeitschritt.

- 6) Berechnung der totalen Spannungen im Element

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + {}^{t+\Delta t}\Delta \sigma \quad (125)$$

- 7) Berechnung der Normalkraft  ${}^{t+\Delta t}N^i$  mittels Integration der totalen Spannungen  ${}^{t+\Delta t}\sigma$  im Element

- 8) Aktualisierung der geometrischen Steifigkeitsmatrix der Elemente  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^{(m)i}$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^{(m)i} = \frac{{}^{t+\Delta t}N^i}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{5} & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{-L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (126)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^{(m)i} \approx \frac{{}^{t+\Delta t}N^i}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

- 9) Aktualisierung des gesamten Verschiebungsvektors  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^i$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1} + {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^i \quad (128)$$

10) Berechnung der lokalen totalen Verschiebungen  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(m)i}$  im mitrotierten  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(m)i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}U_3^i - {}^{t+\Delta t}\alpha^i & {}^{t+\Delta t}\Delta L^i & 0 & {}^{t+\Delta t}U_6^i - {}^{t+\Delta t}\alpha^i \end{bmatrix} \quad (129)$$

11) Berechnung der Elementknotenkräfte, zuerst im mitrotierten  $x'$ - $y'$ -Koordinatensystem ( ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(m)i}$ ), dann im globalen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem ( ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(m)i}$ )

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(m)i} = \int_V \mathbf{B}^{(m)T} {}^{t+\Delta t}\sigma dV + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^{(m)i} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(m)i} \quad (130)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(m)i} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(m)i} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(m)i} \quad (131)$$

12) Berechnung der Systemknotenkräfte  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^i$

13) Aktualisierung der linearen Steifigkeitsmatrix  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(m)i}$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(m)i} = \int_V \mathbf{B}^{(m)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^i \mathbf{B}^{(m)} dV \quad (132)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(m)i} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(m)iT} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^{(m)i} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(m)i} \quad (133)$$

14) Berechnung der Systemsteifigkeitsmatrizen  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^i$  und  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^i$

15) Ende der Newton-Raphson Iteration falls

$$\frac{{}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^i T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1})}{{}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{U}^i T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{F})} \leq \varepsilon_E \quad (134)$$

sonst Schritte 2) bis 14) wiederholen bis Gleichung (134) erfüllt ist.

Am Anfang eines Zeitschritts wird die Newton-Raphson Iteration mit den Matrizen und den Vektoren gestartet, die am Ende des vorherigen Zeitschritts bestimmt wurden, d.h:

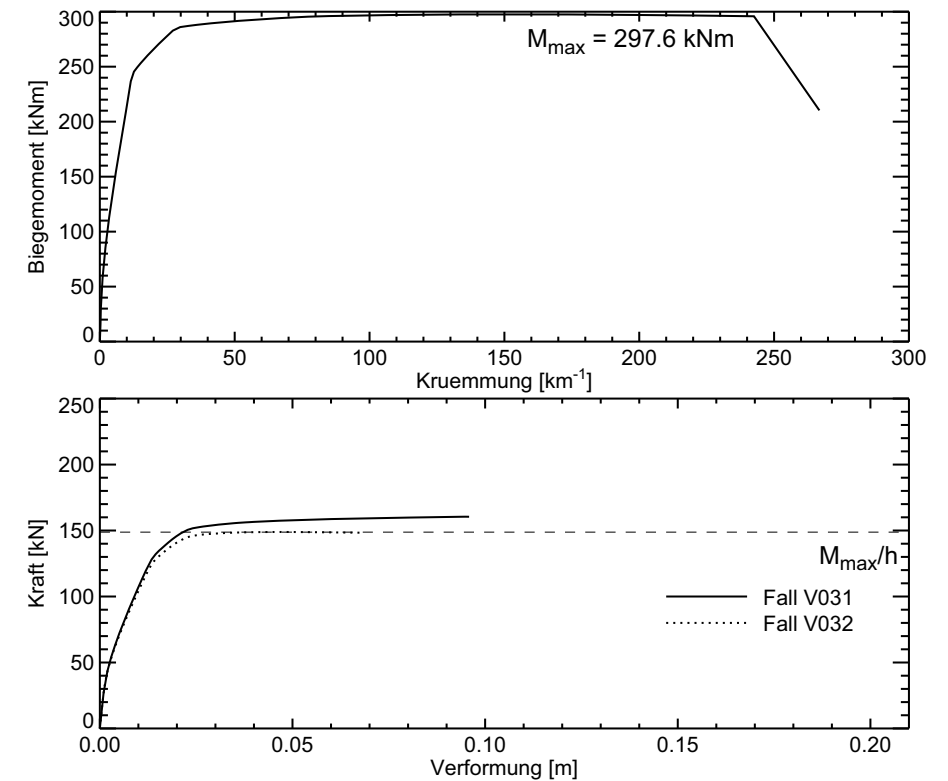
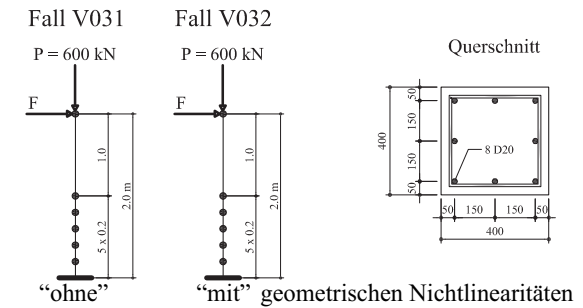
$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T^0 = {}^t\mathbf{K}_T, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_G^0 = {}^t\mathbf{K}_G, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^0 = {}^t\mathbf{F} \quad (135)$$

## Bemerkungen zu den geometrischen Nichtlinearitäten

- Geometrische Nichtlinearitäten können das Verhalten eines Tragwerks massgeblich beeinflussen. Aus diesem Grund ist es wichtig genau zu wissen, welche und wie geometrische Nichtlinearitäten in einem Computerprogramm berücksichtigt werden.
  - Beispiel: In "Seismostruct" [Sei07] werden bei jeder Berechnung sowohl initiale Spannungen als auch grosse Element-Verschiebungen und Rotationen berücksichtigt. Es ist gar nicht möglich eine Berechnung ohne diese Eigenschaften durchzuführen.
  - In den meisten Computerprogrammen ist es hingegen möglich, frei zu wählen, welche geometrische Nichtlinearitäten zu berücksichtigen sind.
  - Es empfiehlt sich, vor einer Berechnung **mit** geometrischen Nichtlinearitäten, eine **ohne** durchzuführen. Ein Vergleich der Resultate erlaubt: (a) Eine Plausibilitätskontrolle und (b) die Beurteilung, ob geometrische Nichtlinearitäten tatsächlich zu berücksichtigen sind.
  - Geometrische Nichtlinearitäten sollen nur berücksichtigt werden, wenn sie tatsächlich massgebend sind. Dies weil sie, (1) die Berechnung der Lösung unnötig verlangsamen, (2) zu einer fehlenden Konvergenz der Berechnung führen können, (3) die Interpretation von Auflagerkräften und Schnittkräften beeinflussen.
- Bei Systemen mit **axialen Zugkräften**, **versteift** die Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten das Verhalten des Systems.
- Bei Systemen mit **axialen Druckkräften**, führt die Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten zu einem **weicheren** Systemverhalten.
  - Eine solche Berechnung ist auf Seite 152 dargestellt. Die Auswirkung der geometrischen Nichtlinearitäten ist vor allem bei der plastischen Steifigkeit  $k_{pl}$  ersichtlich.

- In machen Fällen kann  $k_{pl}$  sogar negativ werden, was sowohl die Konvergenz der Berechnung (Siehe Diskussion zum Abschnitt 2.3.5 auf Seite 140) als auch das tatsächliche Verhalten des Systems massgeblich beeinflusst.
- Systeme mit einer negativen plastischen Steifigkeit  $k_{pl}$  zeigen unter Erdbebeneinwirkung wesentlich grössere Antwortverschiebungen im Vergleich zu Systemen mit gleicher elastischer Steifigkeit und auch nur leicht positiver plastischer Steifigkeit  $k_{pl}$ .
- Systeme, die typischerweise durch geometrische Nichtlinearitäten spürbar beeinflusst werden, sind **Brückenpfeiler** oder **Rahmentragwerke**, bei welchen grosse axiale Druckkräfte vorhanden sind.

- Vergleichsberechnung Nr. 1:



### 2.3.7 Dämpfung bei Zeitverlaufsberechnungen

#### Elastische Systeme

Bei der dynamischen Berechnung von elastischen Systemen mit mehreren Freiheitsgraden wird die Dämpfung meist viskos nach Rayleigh modelliert.

Die System-Dämpfungsmatrix  $C$  wird dann gemäss Gleichung (136) als Linearkombination der System-Massenmatrix  $M$  und der System-Steifigkeitsmatrix  $K$  dargestellt.

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (136)$$

Wobei:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \text{und} \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (137)$$

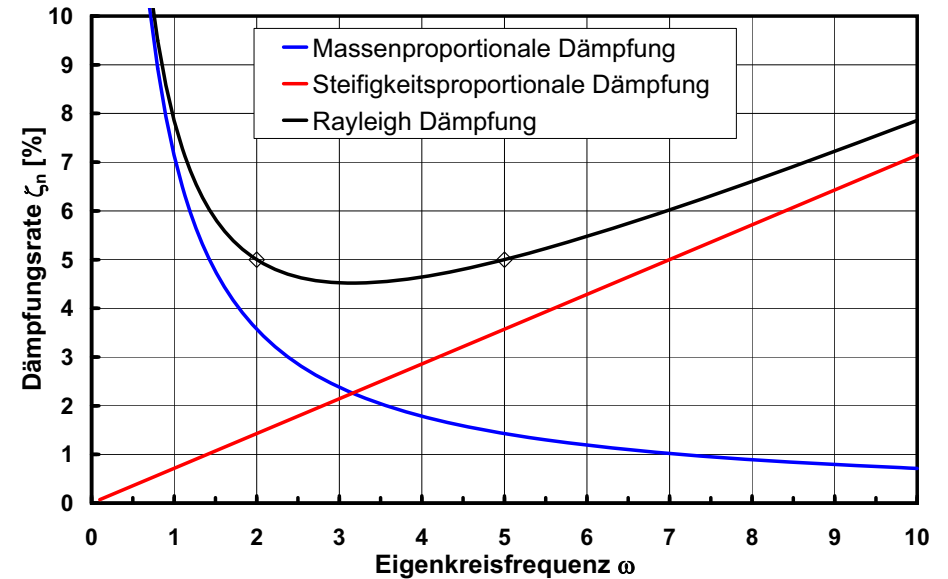
Die Parameter  $a_0$  und  $a_1$  sind dabei so berechnet, dass zwei frei wählbare Eigenschwingungen  $i$  und  $j$  mit der gleichen Rate  $\zeta$  gedämpft werden.

Die Dämpfungsrate  $\zeta_n$  in Funktion der Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  wird anhand von Gleichung (138) berechnet.

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n \quad (138)$$

Eigenschwingungen mit einer Eigenkreisfrequenz kleiner als  $\omega_i$  oder grösser als  $\omega_j$  werden stärker gedämpft, Eigenschwingungen mit einer Frequenz zwischen  $\omega_i$  und  $\omega_j$  werden weniger gedämpft. Diese Eigenschaft der Rayleigh-Dämpfung ist im Bild auf Seite 154 zu sehen.

Die Problematik der Dämpfung bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden wurde bereits im Rahmen der Vorlesung "Tragwerksdynamik und Schwingungsprobleme ([Daz06])" diskutiert. Ausserdem ist eine detail-



Rayleigh Dämpfung von 5% bei den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1=2$  und  $\omega_2=5$  rad/s

lierte Abhandlung der Dämpfungsproblematik in [Cho07] sowie in [Bat96] zu finden.

#### Inelastische Systeme

Strukturen, die während eines Erdbebens inelastischen Verformungen unterworfen sind, weisen mehrere Arten von Dämpfung auf:

- 1) Hysteretische Dämpfung infolge zyklischer Plastifizierung des Tragwerks
- 2) Dämpfung infolge Beschädigung von nichttragenden Elementen
- 3) Dämpfung infolge Energieabstrahlung in den Boden
- 4) Materialdämpfung der elastisch bleibenden Bauteile
- 5) ...

Die inelastische Modellierung einer Struktur anhand von Elementen mit verteilter oder konzentrierter Plastizität erfasst automatisch die hysteretische Dämpfung.

Die anderen Arten von Dämpfung müssen separat berücksichtigt werden und aus den üblichen praktischen Gründen werden sie viskos angenommen. Diese Dämpfungsarten sind deshalb in der Bewegungsdifferentialgleichung des Systems mittels der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  einzuführen.

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  zu definieren. Einige wichtige davon werden in der Folge kurz diskutiert.

- 1) Berechnung der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  als Rayleigh-Dämpfung gemäss Gleichung (136) mit Verwendung der initialen, elastischen System-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{el}$ .  
Da aber im Laufe der Zeitverlaufsberechnung die Steifigkeit des inelastischen Systems immer kleiner wird, die Dämpfungskräfte in der Simulation aber konstant bleiben, sind letztere im Verhältnis viel zu gross und führen zu ungläubwürdigen oder falschen Resultaten.
- 2) Berechnung der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  als Rayleigh Dämpfung gemäss Gleichung (136) mit Verwendung der Tangentensteifigkeitsmatrix des Systems  $\mathbf{K}_T$ . Mit dieser Lösung werden die Probleme aus Punkt 1) vermieden, die Berechnungszeiten werden aber länger. Im Rahmen dieser Lösung gibt es zwei Varianten:
  - Die neue Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  wird nur ein Mal am Anfang jedes Zeitschritts anhand der Tangentensteifigkeitsmatrix  ${}^{t+\Delta t_0} \mathbf{K}_T$  bestimmt.
  - Die neue Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  wird bei jeder Iteration anhand der Tangentensteifigkeitsmatrix  ${}^{t+\Delta t_{i-1}} \mathbf{K}_T$  bestimmt.  
Von dieser letzten Möglichkeit ist eher abzuraten, weil sie zu Konvergenzschwierigkeiten führen kann und weil die Berechnungszeiten deutlich länger werden.

- 3) Berechnung der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  als Linearkombination der System-Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{el}$  der Elemente, die elastisch bleiben (siehe Gleichung (139)).  
Bei Tragwerken, die grossen inelastischen Verformungen unterworfen sind, haben elastisch bleibende Elemente oft eine nur kleine Steifigkeit, sodass die resultierende Dämpfungsmatrix annähernd massenproportional ist (Siehe Punkt 4).  
Faserelemente verhalten sich bereits bei kleinen Verformungen inelastisch. Falls solche Elemente zur Modellierung des Tragwerks verwendet werden, ist es schwierig festzulegen, welche noch als elastisch betrachtet werden können.

$$\mathbf{K}_{el} = \sum_{m=1 \dots n_{el}} \mathbf{K}_{el}^{(m)} \quad (139)$$

- 4) Berechnung der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  als massenproportionale Dämpfung gemäss Gleichung (140).  
Diese Variante hat den Nachteil, dass die unteren Eigenschwingungen gut gedämpft werden, die oberen hingegen kaum. Dies führt zu einer übergrossen Auswirkung der oberen Eigenschwingungen auf das Systemverhalten und gegebenenfalls zu numerischen Problemen.  
$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} \text{ mit } a_0 = 2\zeta_i \omega_i \quad (140)$$
- 5) Berechnung der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  als massenproportionale Dämpfung gemäss Gleichung (140).  
Um die Probleme aus Punkt 4) zu entschärfen, sollen aber die oberen Eigenformen mit numerischer Dämpfung aus dem Zeitintegrationsalgorithmus gedämpft werden.  
Dieses Verfahren ist nur mit einem dissipativen Algorithmus wie der  $\alpha$ -Methode möglich (siehe [HHT77]).

---

## Bemerkungen zur Dämpfung

- Wie “nicht-hysteretische” Dämpfung bei inelastischen Zeitverlaufsrechnungen modelliert wird, ist eines der am heftigsten diskutierten Themen im Erdbebeningenieurwesen. Eine abschliessende Empfehlung ist deshalb unmöglich.
- Die Modellierung, die (momentan) am sinnvollsten erscheint, ist die, die unter Punkt 2) aufgeführt ist.
- **Es empfiehlt sich aber, den Einfluss von verschiedenen Dämpfungsmodellen auf die Antwort des Systems zu untersuchen.**
- Zur Berechnung der Parameter  $a_0$  und  $a_1$  müssen einerseits die zwei Eigenschwingungen  $i$  und  $j$  sowie deren Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  und  $\omega_j$  festgelegt werden.
  - Bei der Wahl der Eigenschwingungen empfiehlt es sich, diejenigen auszuwählen, die den grössten Beitrag zur Gesamtantwort liefern.
  - Für die Abschätzung der Eigenkreisfrequenzen wird empfohlen, Steifigkeiten des gerissenen Zustands zu verwenden.
  - Die Abschätzung von solchen “gerissenen” Eigenkreisfrequenzen erfordert bei Modellen mit Faserelementen einiges an Überlegungen und Sorgfalt. Eine einfache Modalanalyse des Modells liefert die “ungerissenen” Eigenkreisfrequenzen, und es muss dann überlegt werden, wie diese reduziert werden können, um der Riseseildung Rechnung zu tragen.
- Um konservative Ergebnisse in Bezug auf die Antwortbewegungsgrössen zu erhalten, ist es auch denkbar, die “nicht-hysteretische” Dämpfung zu vernachlässigen.

---

Leere Seite