

3 Antwortspektren, Tragwiderstand und Duktilität

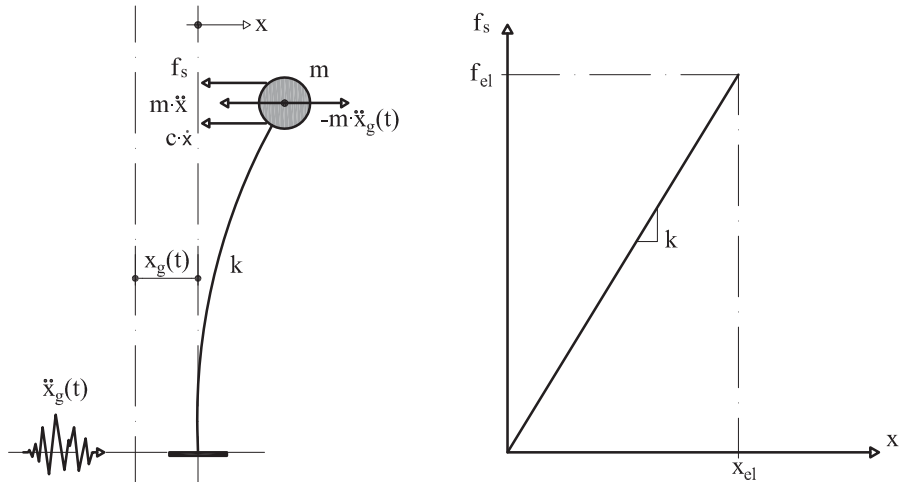
Inhalt

- 1) Zeitverlaufsberechnung von linearen und nichtlinearen EMS
 - Bewegungsgleichung von EMS
 - Numerisches Integrationsverfahren nach Newmark
 - Beispiele
- 2) Elastische Antwortspektren
 - Definition
 - Eigenschaften und Grenzwerte
 - Pseudo-Bewegungsgrösse
 - Kombinierte doppelt-logarithmische Darstellung
 - Spektren in ADRS Format
 - Dämpfung
- 3) Tragwiderstand und Duktilität
 - Inelastische seismische Antwort von Strukturen
 - Arten von Duktilität (lokal & global)
- 4) Inelastische Antwortspektren
 - Definition
 - $R_y - \mu - T$ - Beziehungen

Literatur

- [Bac+97] Bachmann et al.: "Vibration Problems in Structures". ISBN 3-7643-5148-9. Birkhäuser Verlag, Basel 1997.
- [Bac02] Bachmann H.: "Erdbebensicherung von Bauwerken". Birkhäuser, 2002.
- [Cho07] Chopra A.K.: "Dynamics of Structures". Third Edition. Prentice Hall, 2007.
- [Daz04a] Dazio A.: "Antwortspektren". Unterlagen zum Fortbildungskurs "Erdbebenbemessung mit den neuen SIA-Tragwerksnormen" am 7. Oktober 2004. Zürich 2004. (www.ibk.ethz.ch/da/weiterbildung/kurs_071004/antwortspektrum.pdf)
- [Daz04b] Dazio A.: "Stahlbeton". Unterlagen zum SGEB Fortbildungskurs "Erdbebenbemessung mit den neuen SIA-Tragwerksnormen" am 7. Oktober 2004. Zürich 2004. (www.ibk.ethz.ch/da/weiterbildung/kurs_071004/stahlbeton.pdf)
- [DWB99] Dazio A., Wenk T., Bachmann H.: "Versuche an Stahlbetontragwänden unter zyklisch-statischer Einwirkung". IBK Bericht Nr. 239, Birkhäuser, 1999. (e-collection.ethbib.ethz.ch/view/eth:23296)
- [LWB99] Lestuzzi P., Wenk T., Bachmann H.: "Dynamische Versuche an Stahlbetontragwänden auf dem ETH-Erdbebensimulator". IBK Bericht Nr. 240, Birkhäuser, 1999. (e-collection.ethbib.ethz.ch/view/eth:23297)
- [NH82] Newmark N.M., Hall W.J.: "Earthquake Spectra and Design". EERI monograph, 1982.
- [Mar03] Marioni A.: "Innovative Anti-seismic Devices for Bridges". In SIA Dokumentation D0198. SIA, Zürich 2003.
- [Sei09] Seismosoft: "SeismoSignal – Users Manual". Seismosoft [Online], 2009. (www.seismosoft.com)
- [SIA03] SIA: "Einwirkung auf Tragwerke". Norm SIA 261, Zürich 2003.

3.1 Zeitverlaufsberechnung von linearen und nichtlinearen EMS



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f_s = -m\ddot{x}_g \quad (3.1)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g \quad (3.2)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = -\ddot{x}_g \quad (3.3)$$

Wobei:

$$\zeta = c/(2m\omega_n), \omega_n^2 = k/m, f_s = kx = m\omega_n^2x \quad (3.4)$$

Vollständige Berechnung der dynamischen Antwort durch:

- Faltungsintegral ([Cho07] Abschnitt 4.2)
- Numerische Integration der DGL ([Cho07] Abschnitt 5)

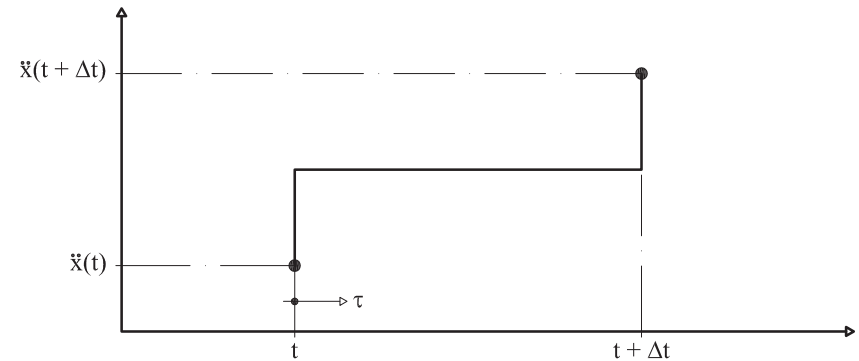
3.1.1 Integrationsverfahren nach Newmark

- Inkrementelle Formulierung der Differentialgleichung

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta\dot{x} + k\Delta x = -m\Delta\ddot{x}_g \quad (3.5)$$

$${}^{t+\Delta t}x = {}^t x + \Delta x, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{x} = {}^t \dot{x} + \Delta\dot{x}, \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{x} = {}^t \ddot{x} + \Delta\ddot{x} \quad (3.6)$$

- Annahme des Verlaufs der Beschleunigung im Zeitschritt



$$\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{2}({}^t\ddot{x} + {}^{t+\Delta t}\ddot{x}) = {}^t\ddot{x} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2} \quad (3.7)$$

$$\dot{x}(\tau) = {}^t\dot{x} + \int_t^\tau \ddot{x}(\tau) d\tau = {}^t\dot{x} + \left({}^t\ddot{x} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2}\right)(\tau - t) \quad (3.8)$$

$$x(\tau) = {}^t x + \int_t^\tau \dot{x}(\tau) d\tau = {}^t x + \int_t^\tau \left[{}^t\dot{x} + \left({}^t\ddot{x} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2}\right)(\tau - t)\right] d\tau \quad (3.9)$$

$$x(\tau) = {}^t_x + {}^t_{\dot{x}}(\tau - t) + \left({}^t_{\ddot{x}} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2}\right) \frac{(\tau - t)^2}{2} \quad (3.10)$$

Die Inkremente der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Verschiebung im Zeitschritt betragen somit:

$$\Delta\ddot{x} = {}^{t+\Delta t}_{\ddot{x}} - {}^t_{\ddot{x}} = \Delta\ddot{x} \quad (3.11)$$

$$\Delta\dot{x} = {}^{t+\Delta t}_{\dot{x}} - {}^t_{\dot{x}} = \left({}^t_{\ddot{x}} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2}\right) \Delta t \quad (3.12)$$

$$\Delta x = {}^t_{\dot{x}} \Delta t + \left({}^t_{\ddot{x}} + \frac{\Delta\ddot{x}}{2}\right) \frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.13)$$

Die Gleichungen für $\Delta\dot{x}$ und Δx können generalisiert werden als:

$$\Delta\dot{x} = ({}^t_{\ddot{x}} + \gamma\Delta\ddot{x})\Delta t, \quad \Delta x = {}^t_{\dot{x}}\Delta t + ({}^t_{\ddot{x}} + 2\beta\Delta\ddot{x})\frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.14)$$

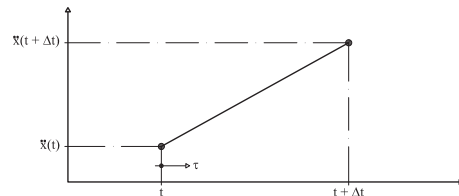
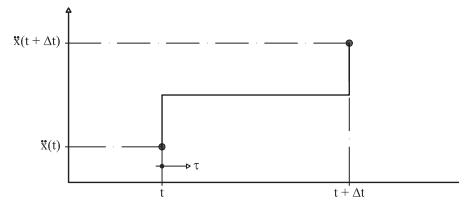
mit:

Konstanter Beschleunigung:

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\Delta t}{T} \leq \infty$$

Linearer Beschleunigung:

$$\beta = \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\Delta t}{T} \leq 0.551$$



• Lösung der DGL

Die Ausdrücke von Gleichung (3.14) werden in Gleichung (3.5) eingesetzt, die jetzt für die einzige verbleibende Unbekannte $\Delta\ddot{x}$ gelöst werden kann

$$(m + c\gamma\Delta t + k\beta\Delta t^2)\Delta\ddot{x} = -m\Delta\ddot{x}_g - c{}^t_{\dot{x}}\Delta t - k\left({}^t_{\dot{x}}\Delta t + {}^t_{\ddot{x}}\frac{\Delta t^2}{2}\right) \quad (3.15)$$

oder in kompakter Form

$$\tilde{m}\Delta\ddot{x} = \tilde{\Delta p} \quad (3.16)$$

Durch Rückwärtseinsetzen von $\Delta\ddot{x}$ können die gesuchten Bewegungsgrößen zur Zeit $t + \Delta t$ berechnet werden.

Lineare Systeme

- m , c und k bleiben konstant während des Erdbebens.
- Die Grösse \tilde{m} ist ebenfalls konstant und kann im Voraus bestimmt werden.

Nichtlineare Systeme

- Die Masse m und die Dämpfung c bleiben typischerweise konstant während des ganzen Erdbebens.
- Die Steifigkeit k variiert während des Erdbebens und \tilde{m} ist somit nicht mehr konstant.
- Falls sich die Steifigkeit innerhalb des Zeitschrittes ändert, muss iteriert werden.

3.1.2 Implementierung des Integrationsverfahrens nach Newmark in der Excel-Tabelle "EBI_Einmassenschwinger_FS09.xls"

Gleichung (3.15), hier nochmals geschrieben, wird in der Excel-Tabelle wie folgt implementiert:

$$\underbrace{(m + c\gamma\Delta t + k\beta\Delta t^2)}_{\text{meq}} \underbrace{\Delta\ddot{x}}_{\text{da}} = \underbrace{-m\Delta\ddot{x}_g}_{\Delta F(t)} - c \underbrace{\dot{\ddot{x}}\Delta t}_{\text{dv}} - k \underbrace{\left(\dot{\ddot{x}}\Delta t + \ddot{\ddot{x}}\frac{\Delta t^2}{2}\right)}_{\text{dd}}$$

- In den Spalten **C** bis **E** werden zuerst die sogenannten "**Prädiktoren**" **dd**, **dv** und **da** bestimmt:

$$\text{dd} = \dot{\ddot{x}}\Delta t + \ddot{\ddot{x}}\frac{\Delta t^2}{2} \quad (\text{"delta-displacement"})$$

$$\text{dv} = \ddot{\ddot{x}}\Delta t \quad (\text{"delta-velocity"})$$

$$\text{da} = \frac{-m\Delta\ddot{x}_g - c \cdot \text{dv} - k \cdot \text{dd}}{\text{meq}} = \Delta\ddot{x} \quad (\text{"delta-acceleration"})$$

- In den Spalten **F** bis **H** werden anhand von sogenannten "**Korrektoren**" die Bewegungsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmt:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{x} = \ddot{x} + \text{da}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{x} = \dot{x} + \underbrace{\text{dv} + (\text{da} \cdot \gamma \cdot \Delta t)}_{\Delta\dot{x}}$$

$${}^{t+\Delta t}x = x + \underbrace{\text{dd} + (\text{da} \cdot \beta \cdot \Delta t^2)}_{\Delta x}$$

- In der Spalte **I** wird schlussendlich die absolute Beschleunigung \ddot{x}_{abs} zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmt:

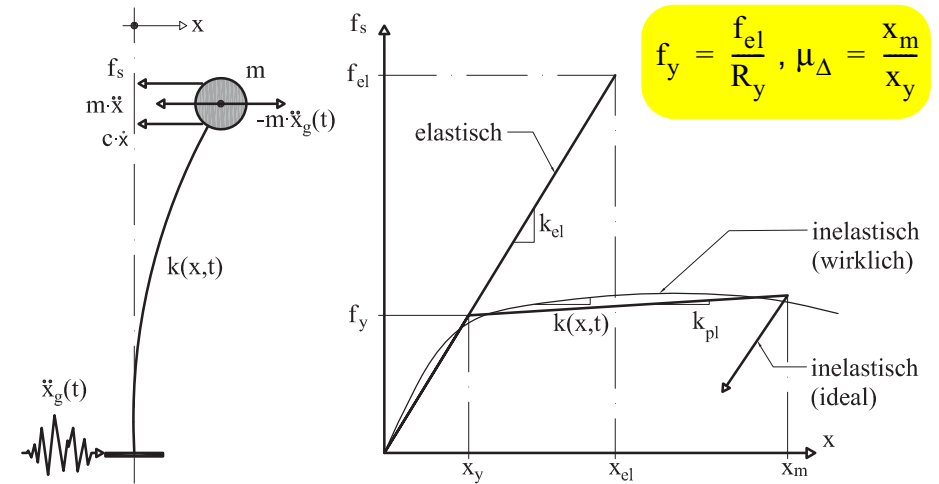
$${}^{t+\Delta t}\ddot{x}_{\text{abs}} = {}^{t+\Delta t}\ddot{x} + {}^{t+\Delta t}\ddot{x}_g$$

Bemerkungen zur Anwendung der Excel-Tabelle

- Die gelb-unterlegten Felder können geändert werden:
 - Die Spalten **A** und **B** enthalten die Stützwerte im Abstand Δt , die den Zeitverlauf der Bodenbewegung $\ddot{x}_g(t)$ beschreiben, für welche die Antwort des Einmassenschwingers (EMS) zu bestimmen ist. Um die Antwort des EMS infolge einer anderen Bodenbewegung $\ddot{x}_g(t)$ zu berechnen, müssen diese zwei Spalten mit den Stützwerten des neuen Erdbebenzeitverlaufs gefüllt werden.
 - Das Bewegungsverhalten eines linearen EMS ist für einen gegebenen Erdbebenzeitverlauf $\ddot{x}_g(t)$, nur von seiner Periode $T = 2\pi/\omega_n$ und seiner Dämpfung ζ abhängig. Aus diesem Grund können T und ζ in der Excel-Tabelle ebenfalls frei gewählt werden.
 - Die Masse m ist lediglich benötigt, um die tatsächliche Steifigkeit des EMS $k = m \cdot \omega_n^2$ zu definieren und daraus die korrekte Federkraft $f_s = k \cdot x$ zu berechnen.
 - Im Feld "Anzahl Perioden" (Zelle **V19**) wird angegeben für wievielen Perioden T_i des EMS dessen dynamische Antwort berechnet werden soll, um damit die entsprechenden Antwortspektren zeichnen zu können.

- Die Antwortspektren werden mit dem Makro “**antwortspektrum**” berechnet. Das Makro fügt lediglich die verschiedene Perioden T_i in der Zelle **S3** ein; dann liest sie die Maxima der Antwortgrößen aus der Zellen **F6**, **G6**, **H6** und **I6** heraus und schreibt sie in den entsprechenden Zellen der Spalten **L** bis **P**.

3.1.3 Nichtlinearer EMS



- Widerstand f_y des nichtlinearen EMS

$$f_y = \frac{f_{el}}{R_y} = \frac{k_{el} \cdot x_{el}}{R_y} \quad (3.17)$$

- R_y = **Kraftreduktionsbeiwert**
- f_{el} = maximalen Federkraft f_s , die ein linearer EMS gleicher Periode T und Dämpfung ζ unter dem gleichen Zeitverlauf \ddot{x}_g erfahren würde
- Maximale Verschiebungsantwort x_m des nichtlinearen EMS

$$x_m = \mu_{\Delta} \cdot x_y \quad \text{bzw.} \quad \mu_{\Delta} = x_m / x_y \quad (3.18)$$

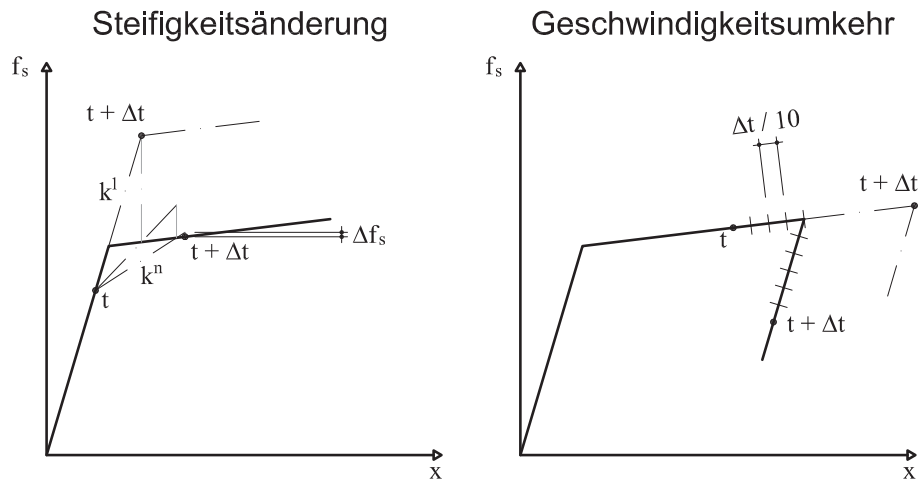
- x_y = Fließverschiebung
- μ_{Δ} = **Verschiebeduktilität**

Bemerkung

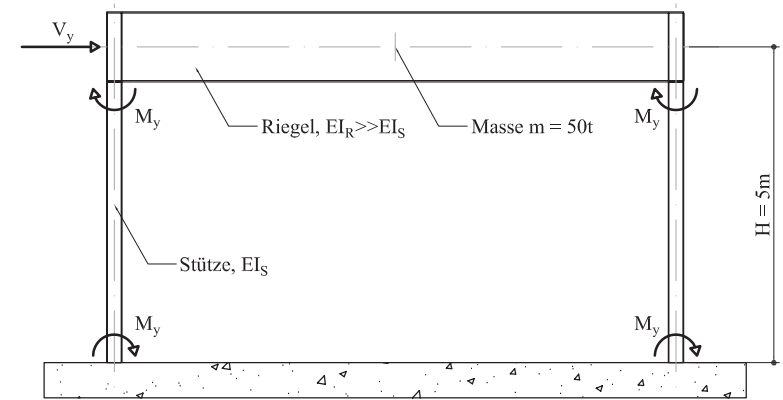
Es wird später im Laufe der Vorlesung klar werden, warum die Konzepte des **Kraftreduktionsbeiwerts** R_y und der **Verschiebduktilität** μ_Δ sehr nützlich sind.

- Notwendige Anpassungen

Für nichtlineare EMS mit idealisierten Kraft-Verformungs-Eigenschaften sind folgende Anpassungen notwendig, wenn die Integrationsverfahren nach Newmark angewendet wird:



3.1.4 Anwendungsbeispiel: Einfacher Rahmen

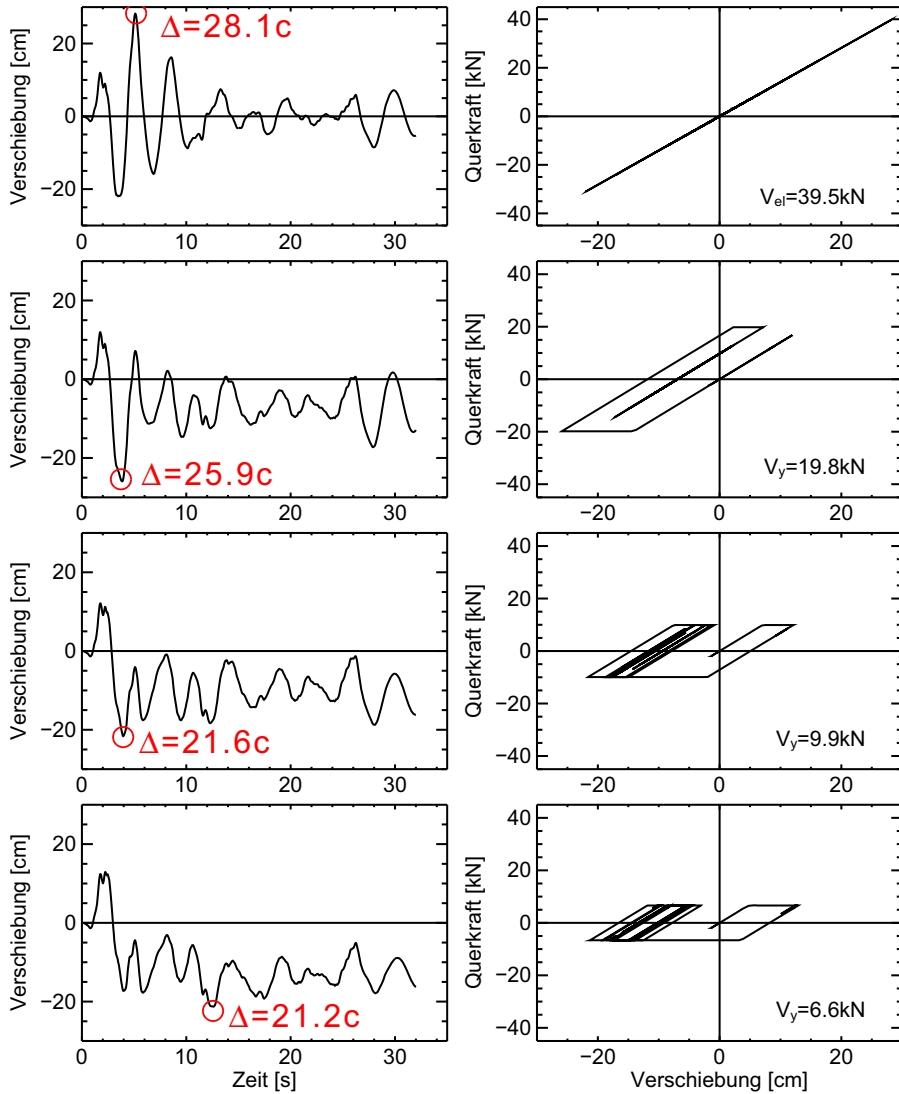


$$k = 2 \cdot \frac{12EI_s}{H^3}, T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, V_y = 2 \cdot \frac{M_y}{H/2}, \Delta_y = \frac{V_y}{k} \quad (3.19)$$

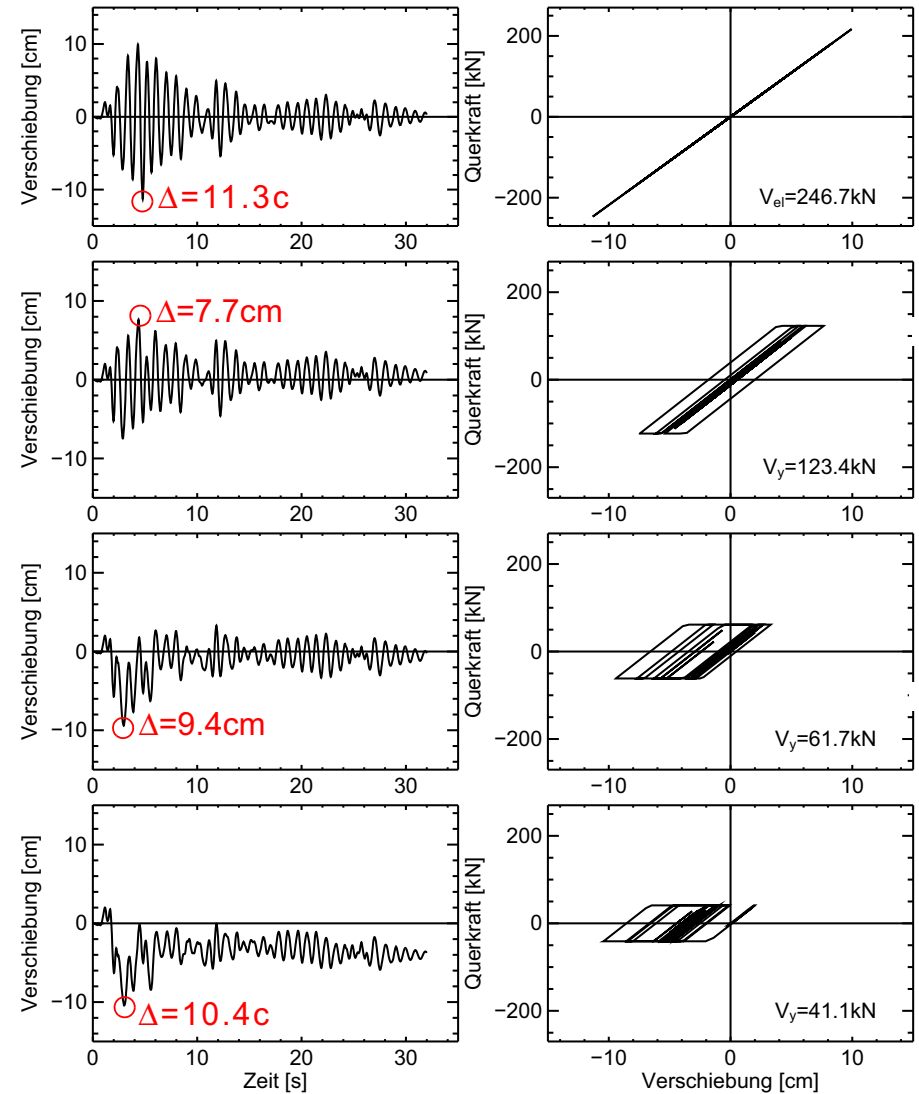
- Parametervariation

Stütze	k [kN/m]	T [s]	f _y [MPa]	V _y [kN]	V _y /V _{el} [-]	Δ _y [cm]
HEA 100	141	3.75	595	39.5	1.00	28.1
HEA 100	141	3.75	298	19.8	0.50	14.0
HEA 100	141	3.75	149	9.9	0.25	7.0
HEA 100	141	3.75	99	6.6	0.167	4.7
HEA 220	2181	0.95	543	246.7	1.00	11.3
HEA 220	2181	0.95	272	123.4	0.50	5.7
HEA 220	2181	0.95	136	61.7	0.25	2.8
HEA 220	2181	0.95	91	41.1	0.167	1.9
IPE 550	27055	0.27	185	411.4	1.00	1.52
IPE 550	27055	0.27	93	205.7	0.50	0.76
IPE 550	27055	0.27	43	102.9	0.25	0.38
IPE 550	27055	0.27	31	68.6	0.167	0.25

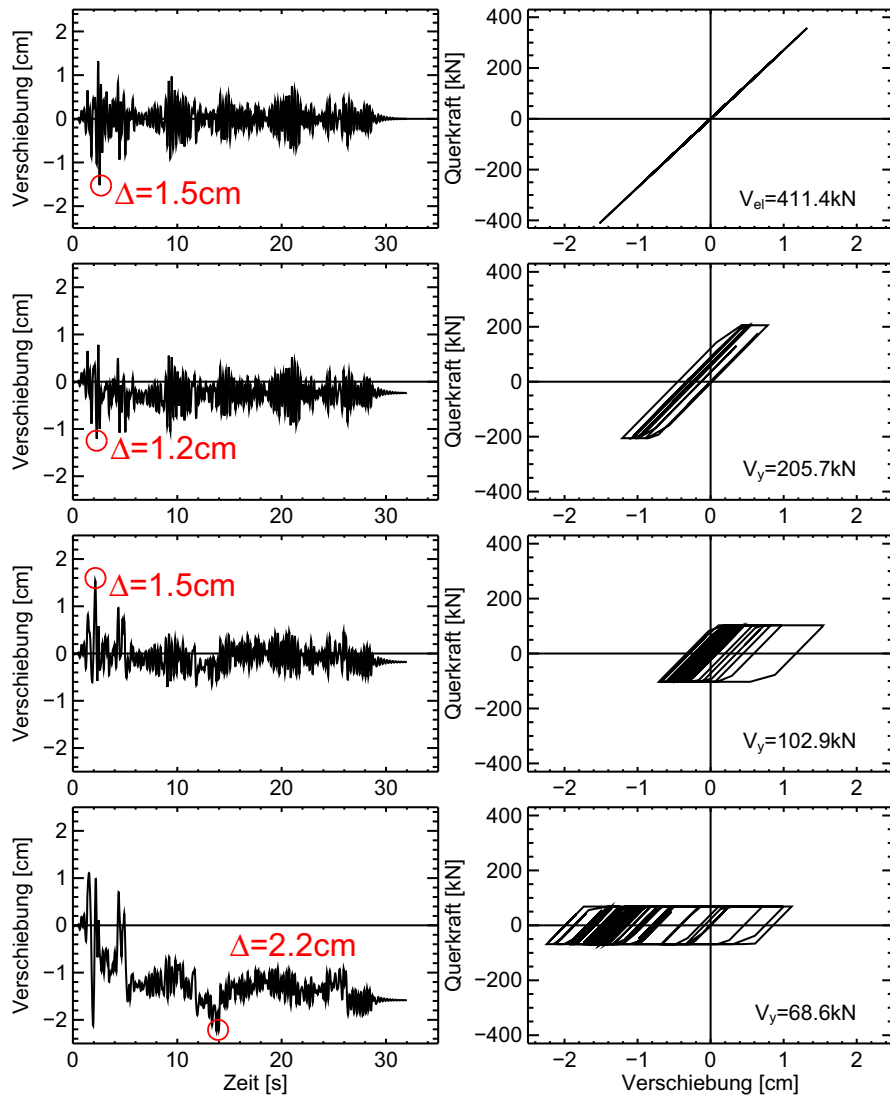
- Rahmen mit $T = 3.75s$, $\zeta = 5\%$ unter "El Centro" Erdbeben



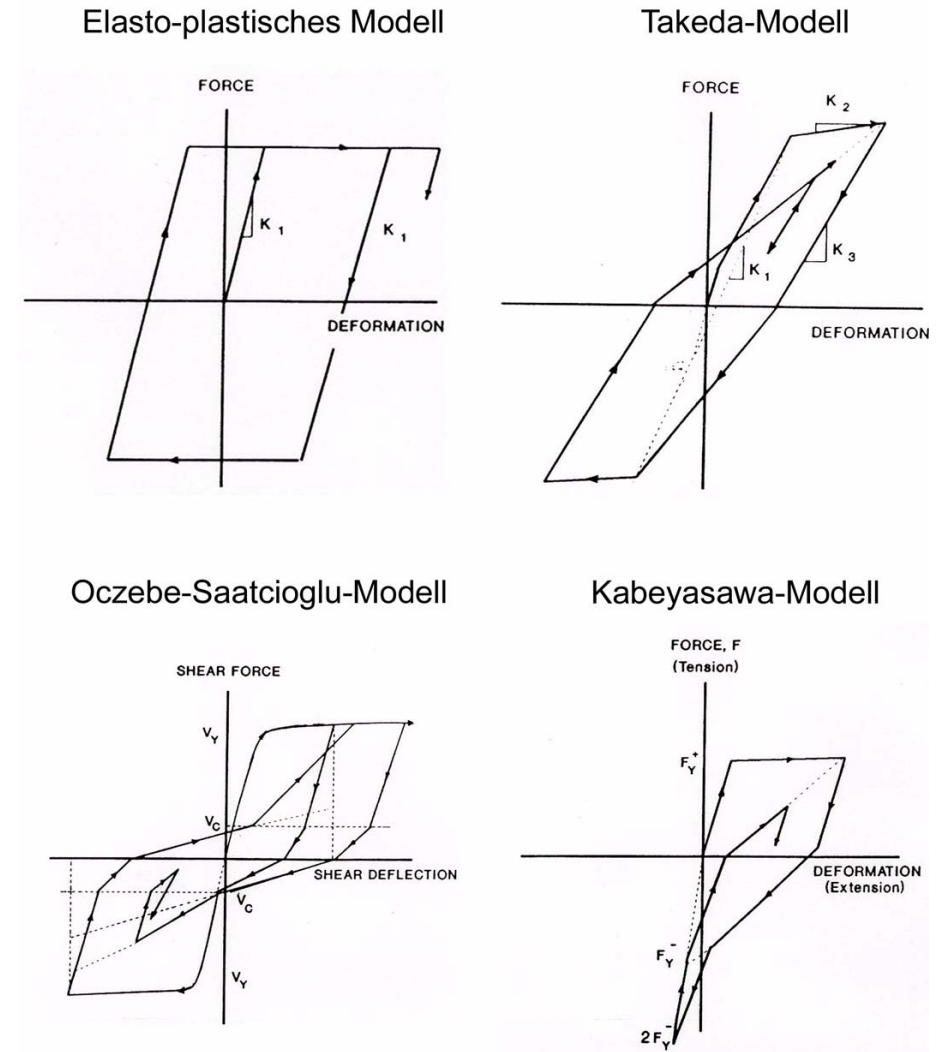
- Rahmen mit $T = 0.95s$, $\zeta = 5\%$ unter "El Centro" Erdbeben



- Rahmen mit $T = 0.27s$, $\zeta = 5\%$ unter "El Centro" Erdbeben

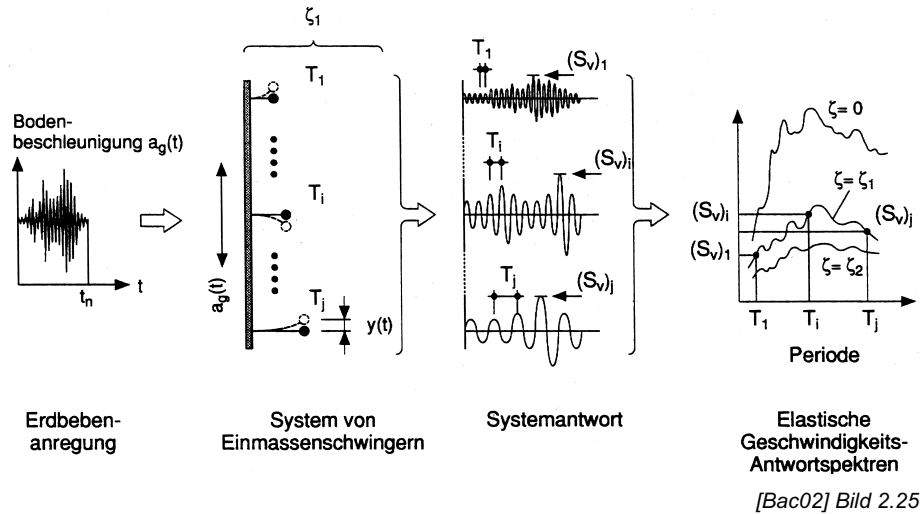


3.1.5 Beispiele von inelastischen hysteretischen Gesetzen



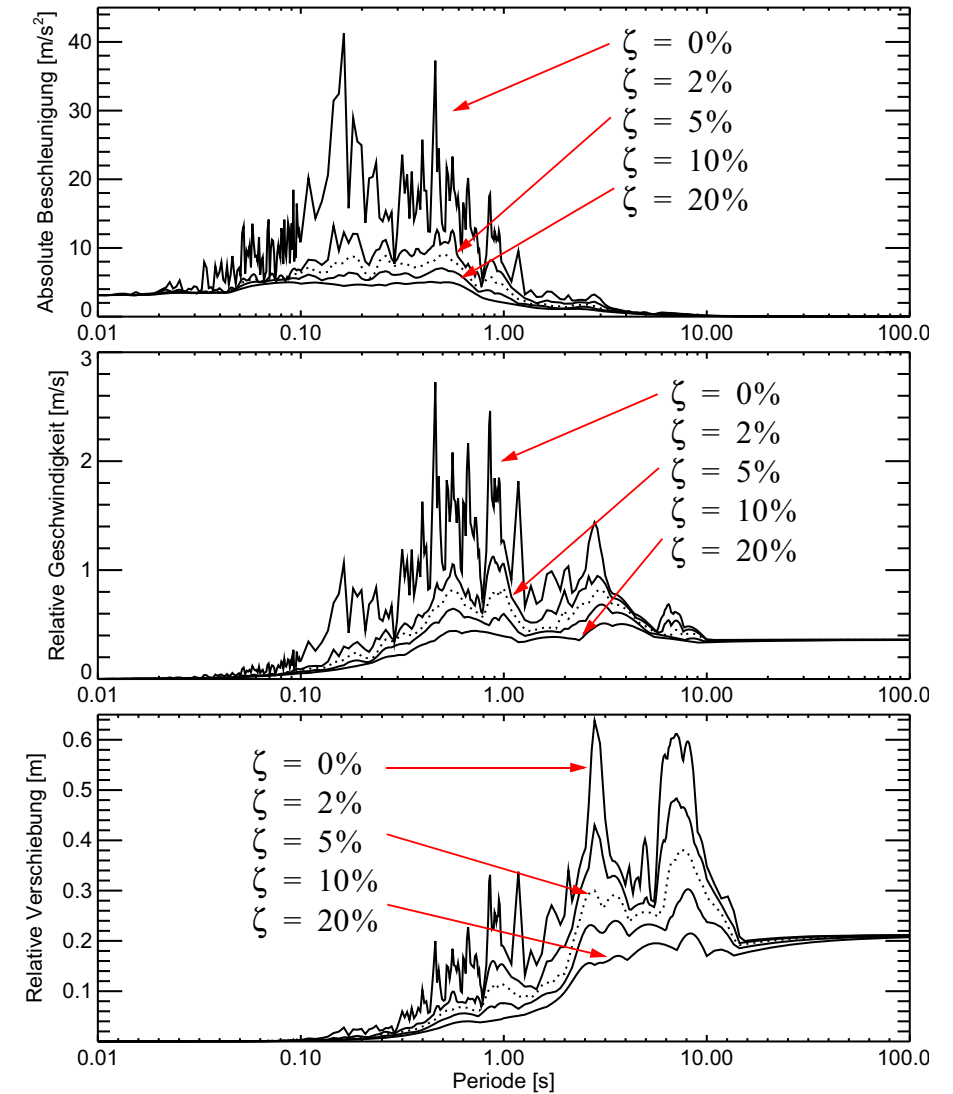
3.2 Elastische Antwortspektren [Daz04a]

3.2.1 Berechnung von Antwortspektren

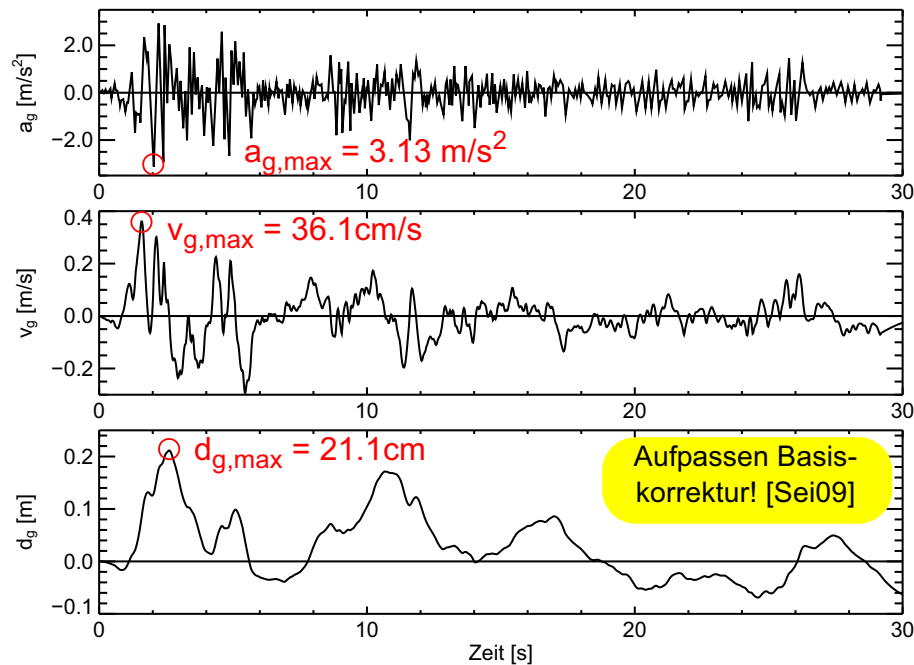
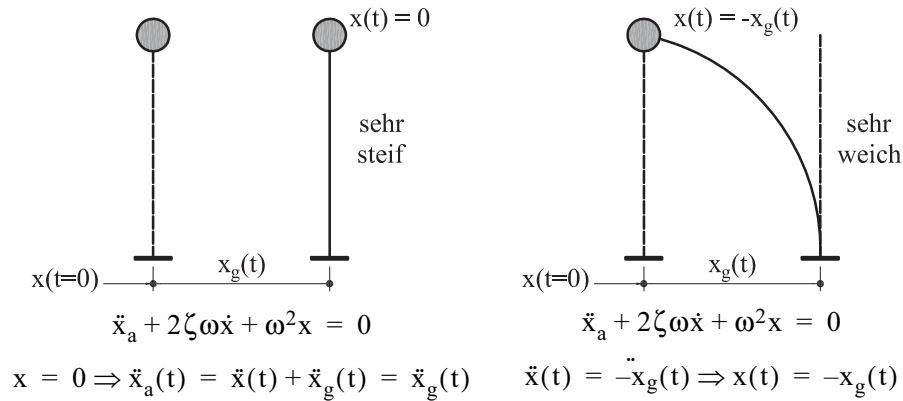


- **Antwortspektren** dienen zur Auswertung von Erdbebenaufzeichnungen aber vor allem, in Form von **Bemessungsspektren**, zur Erdbebenbemessung von Bauwerken
- **Antwortspektren** sollen für alle Perioden und Dämpfungen, die bei Bauwerken vorkommen, berechnet werden.
- Wo nichts anderes angegeben, beziehen sich die nächsten Antwortspektren auf die Nord-Süd Komponente des El Centro Erdbebens vom 18. Mai 1940 ([Cho07])
- Weitere Zeitverläufe auf:
 - 1) <http://db.cosmos-eq.org/scripts/default.plx>
 - 2) <http://peer.berkeley.edu/nga/>

• “El Centro”: Lineare Antwortspektren



• Grenzwerte von Antwortspektren



3.2.2 Pseudo-Bewegungsgrösse

• Pseudo-Geschwindigkeit S_{pv}

$$S_{pv} = \omega S_d \quad (3.20)$$

- S_{pv} hat die Einheiten einer Geschwindigkeit

- S_{pv} ist ein Mass für die maximale Verformungsenergie

$$E_s = \frac{kS_d^2}{2} = \frac{k(S_{pv}/\omega)^2}{2} = \frac{mS_{pv}^2}{2} \quad (3.21)$$

• Pseudo-Beschleunigung

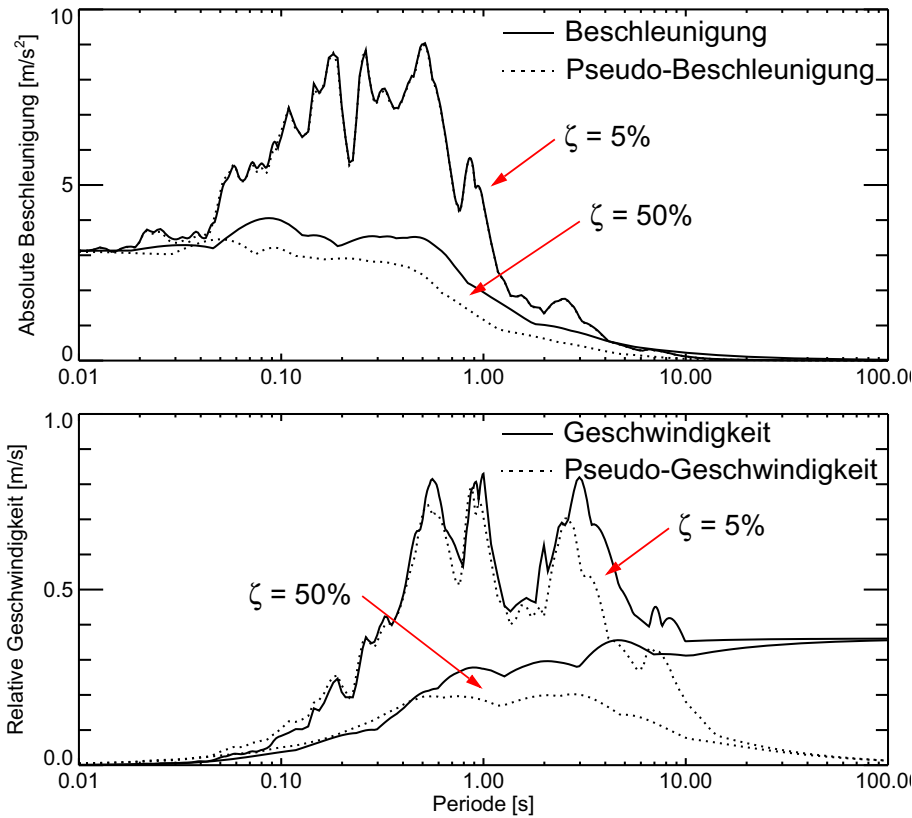
$$S_{pa} = \omega^2 S_d \quad (3.22)$$

- S_{pa} hat die Einheiten einer Beschleunigung

- S_{pa} ist ein Mass für die maximale Querkraft

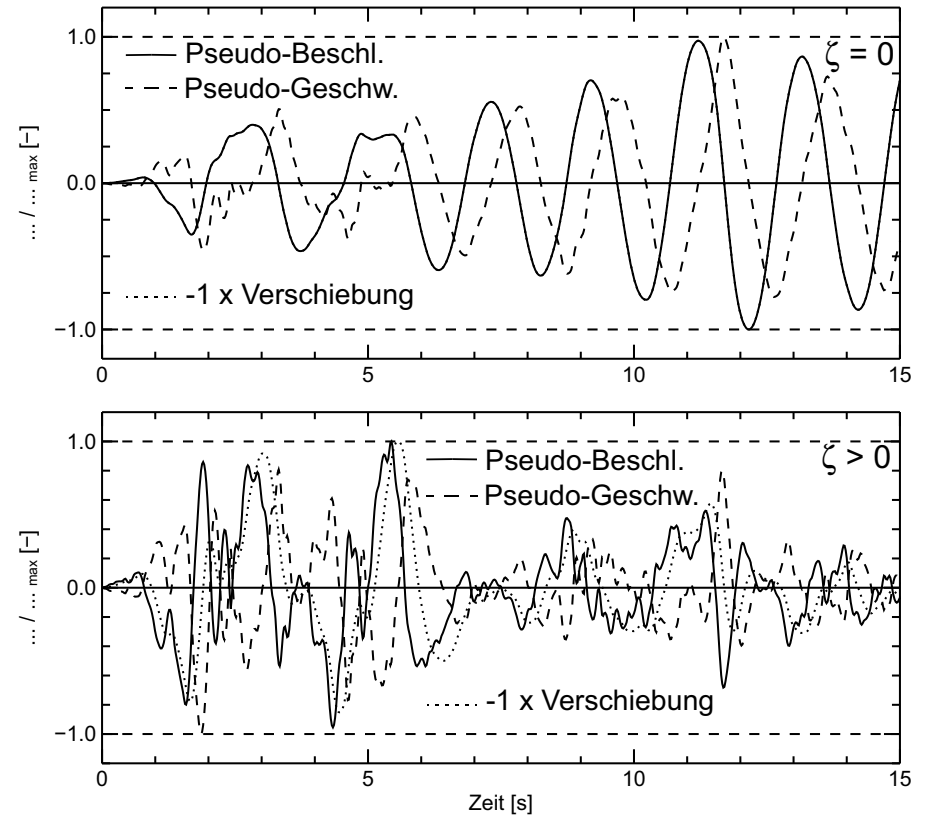
$$V = kS_d = k(S_{pa}/\omega^2) = mS_{pa} \quad (3.23)$$

• Wirkliche vs. Pseudo-Bewegungsgrösse



- Für $\zeta = 0$ sind Beschleunigung und Pseudo-Beschleunigung gleich.
- Für $T \Rightarrow \infty$ verschwindet die Pseudo-Geschwindigkeit
- Pseudo-Geschwindigkeit und Pseudo-Beschleunigung entsprechen in etwa den wirklichen Bewegungsgrößen bei EMS mit $\zeta < 20\%$ und $T < 1s$

• Bemerkungen zur Pseudo-Beschleunigung



$$\ddot{x}_a(t) = -\omega^2 x(t) - 2\zeta \omega \dot{x}(t) \tag{3.24}$$

Zeitverlauf der Pseudo-Beschleunigung A(t)

- Für $\zeta = 0$: $x(t) = A(t)$
- Für $\zeta > 0$: bei x_{\max} : $x_a = A$ aber $A < A_{\max}$

Verschiebung der Maxima durch die Dämpfung

• Kombinierte doppelt-logarithmische Darstellung

$$S_{pv} = \omega S_d \quad \log(S_{pv}) = \log(\omega) + \log(S_d)$$

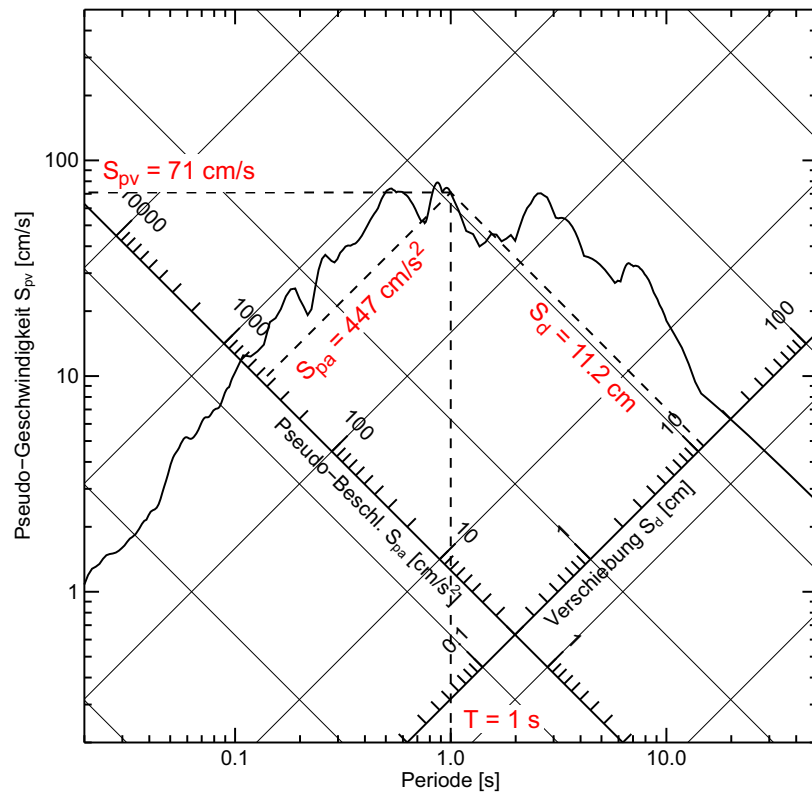
$$\log(S_{pv}) = \log(f) + \log(2\pi) + \log(S_d)$$

$$\log(S_{pv}) = -\log(T) + \log(2\pi) + \log(S_d)$$

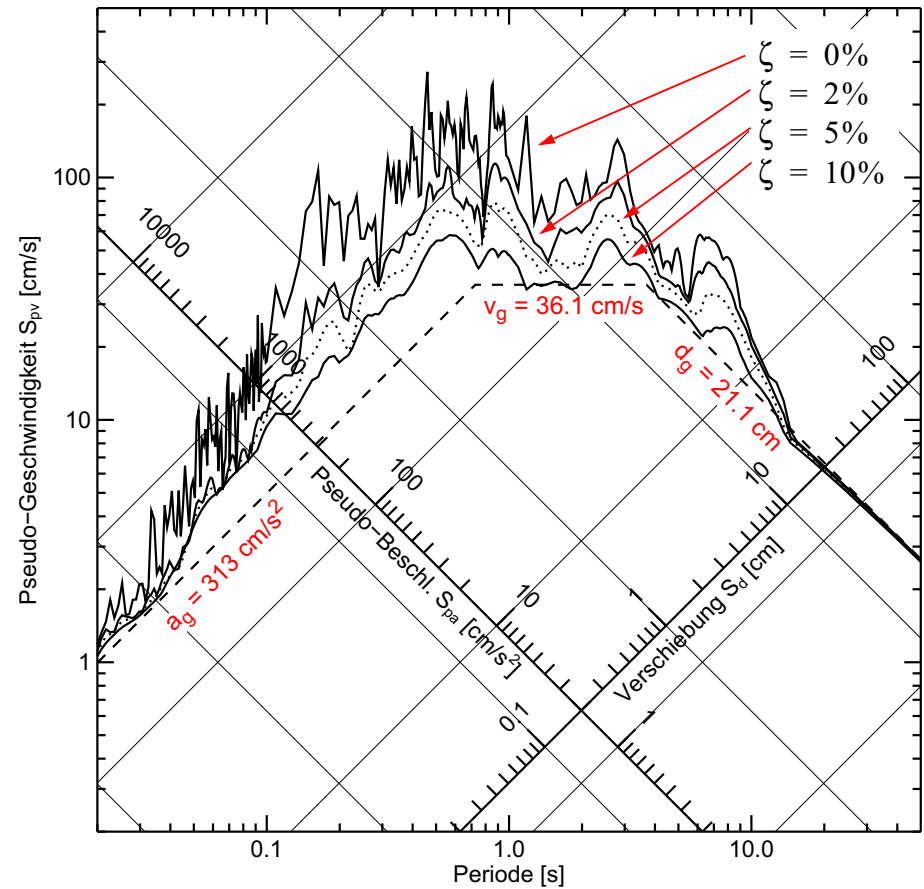
$$S_{pv} = \frac{S_{pa}}{\omega} \quad \log(S_{pv}) = -\log(\omega) + \log(S_{pa})$$

$$\log(S_{pv}) = -\log(f) - \log(2\pi) + \log(S_{pa})$$

$$\log(S_{pv}) = \log(T) - \log(2\pi) + \log(S_{pa})$$

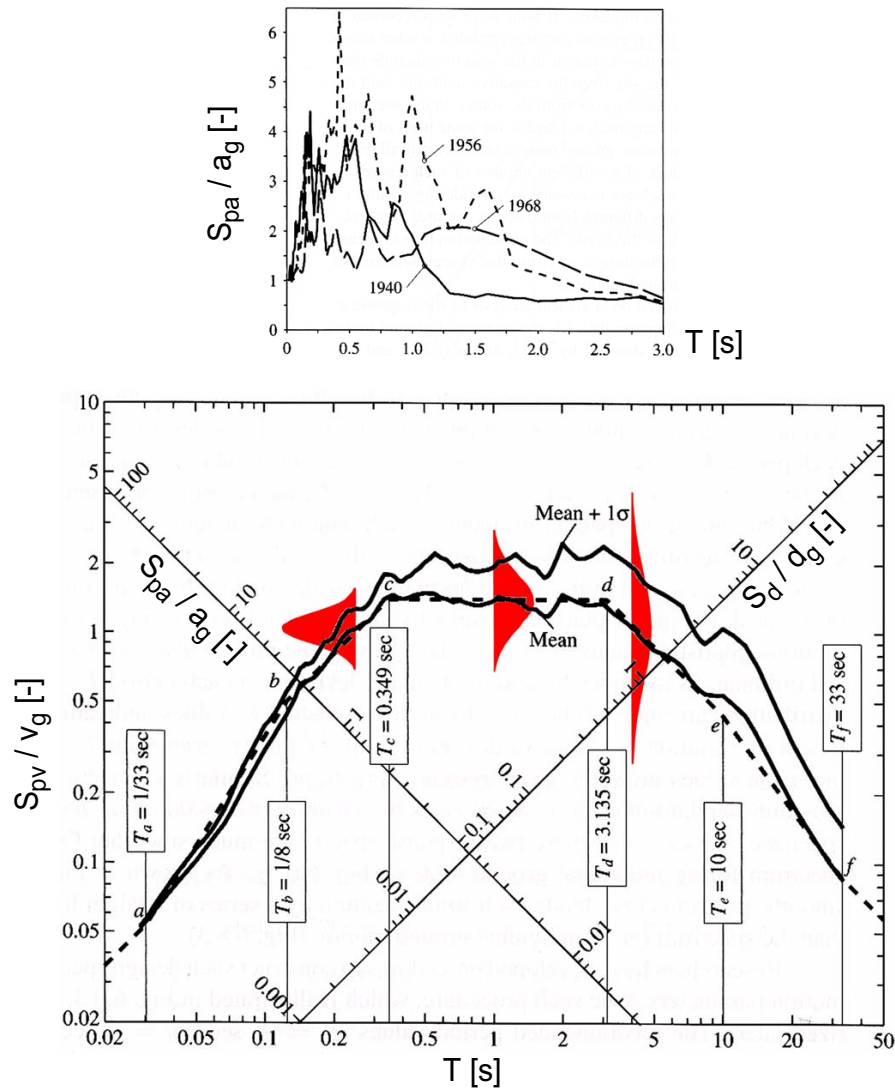


3.2.3 Eigenschaften von linearen Antwortspektren

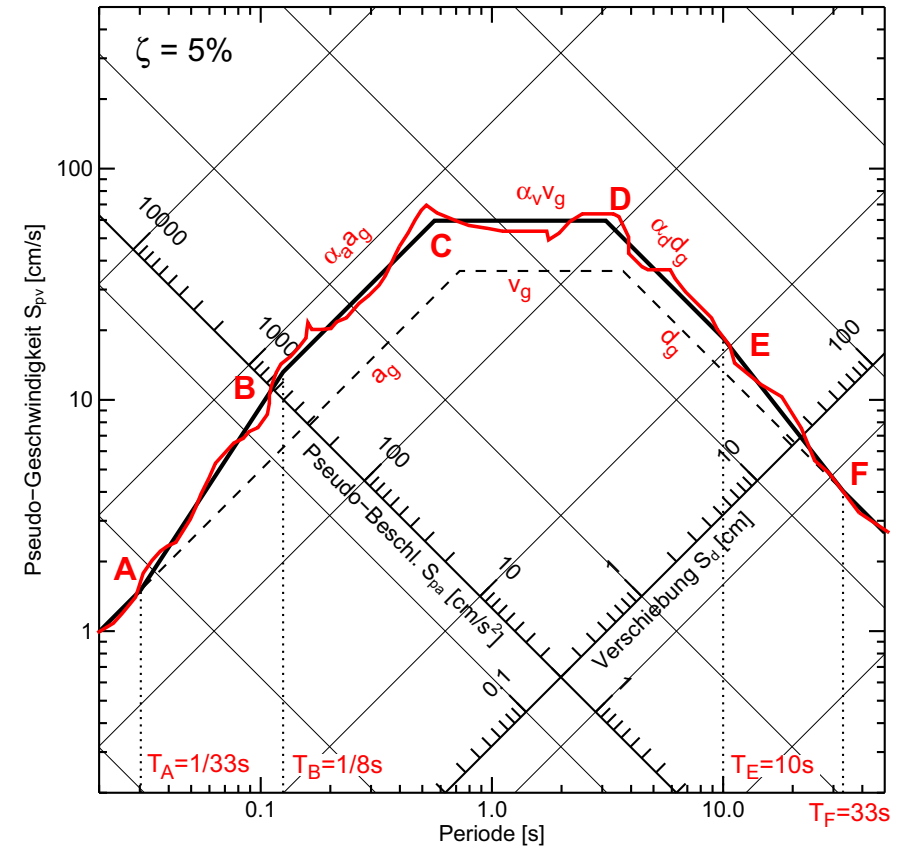


Antwortspektren weisen Bereiche die entweder mehr von der **Bodenbeschleunigung** (kleine Periode) oder von der **Bodengeschwindigkeit** (mittlere Periode) oder von der **Bodenverschiebung** (grosse Periode) beeinflusst sind.

3.2.4 Bemessungsspektren nach Newmark ([Cho07] Fig. 6.9.2)

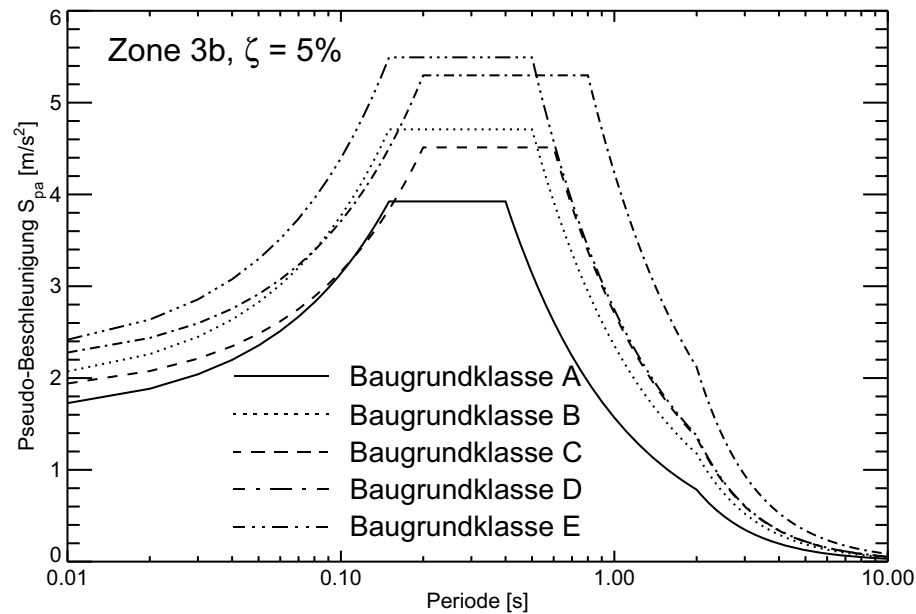


• Elastische Bemessungsspektren nach Newmark



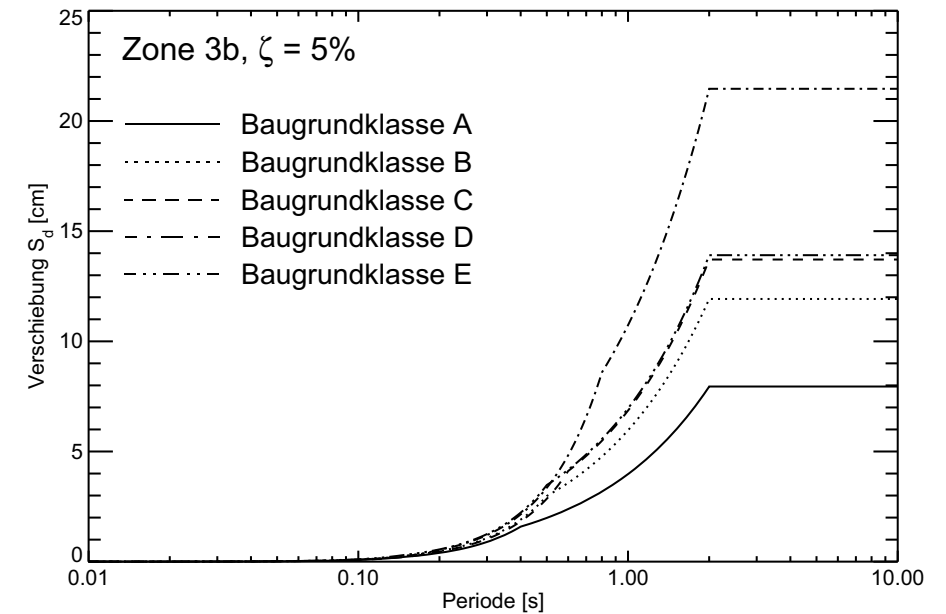
Dämpfung ζ	Median(50%)			Eine Stdabw. (84%)		
	α_a	α_v	α_d	α_a	α_v	α_d
2%	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5%	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10%	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20%	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

- Elastische Antwortspektren nach SIA 261 ([SIA03] Art. 16.2.3)



- **BGK A:** Harter oder weicher Fels unter max. 5 m Lockergesteinsabdeckung.
- **BGK B:** Ablagerungen von grossräumig zementiertem Kies und Sand mit einer Mächtigkeit über 30 m.
- **BGK C:** Ablagerungen von normal konsolidiertem und unzementiertem Kies und Sand mit einer Mächtigkeit über 30 m.
- **BGK D:** Ablagerungen von nicht konsolidiertem Feinsand Silt und Ton mit einer Mächtigkeit über 30 m.
- **BGK E:** Alluviale Oberflächenschicht der BGK C oder D mit einer Mächtigkeit von 5 bis 30 m über einer Schicht der BGK A oder B.
- **BGK F:** Strukturempfindliche und organische Ablagerungen mit einer Mächtigkeit über 10 m

- **Verschiebungsantwortspektren** nach SIA 261

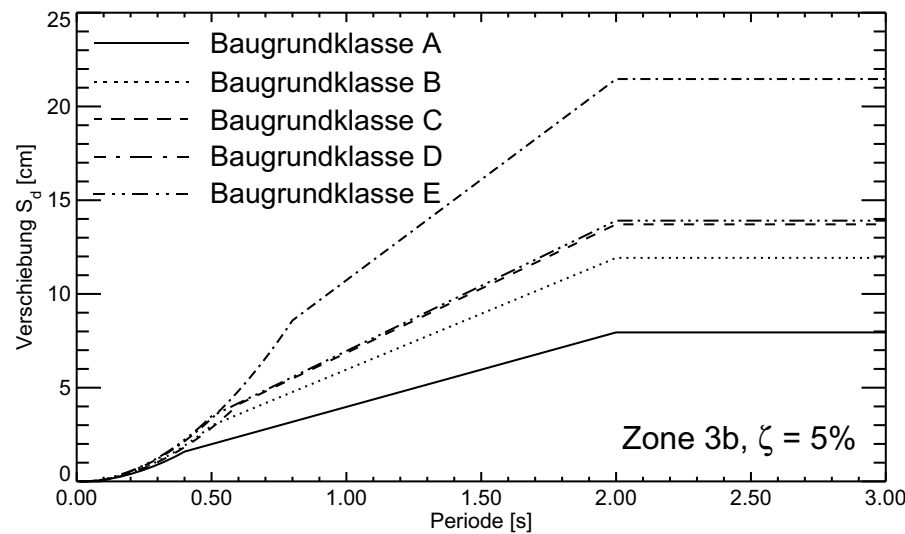
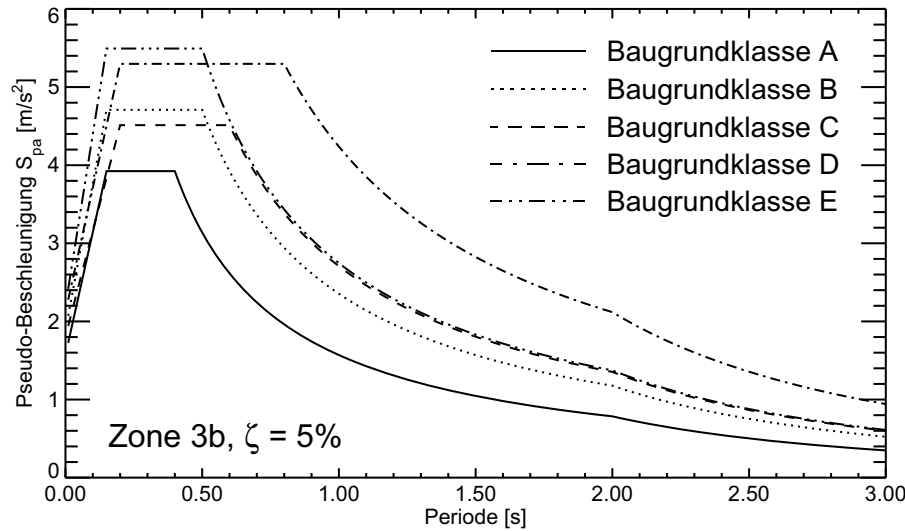


- Die Verschiebungsantwortspektren wurden aus den Beschleunigungsantwortspektren mittels Gleichung (3.25) berechnet.

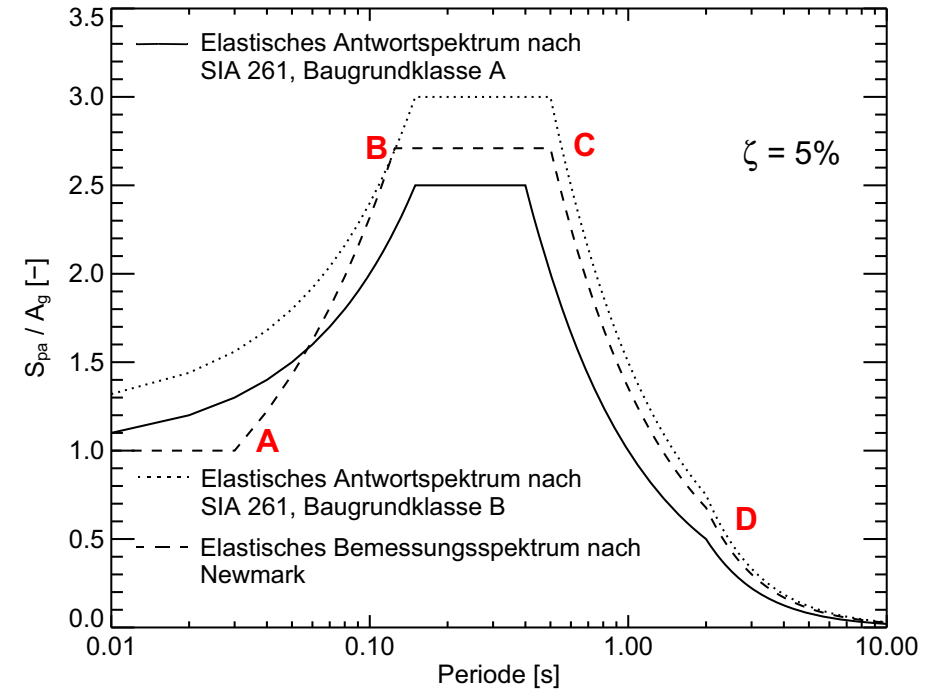
$$S_d = \frac{S_{pa}}{\omega^2} \quad (3.25)$$

- Die Verschiebungsantwortspektren sind wichtige Bemessungswerkzeuge, weil sie (auch bei kräftebasiertenverfahren Bemessungsverfahren) die einfache Schätzung der erwarteten Verformungen (d.h. auch der erwarteten Schäden) erlauben.

- Elastische Antwortspektren nach SIA 261 (linear)

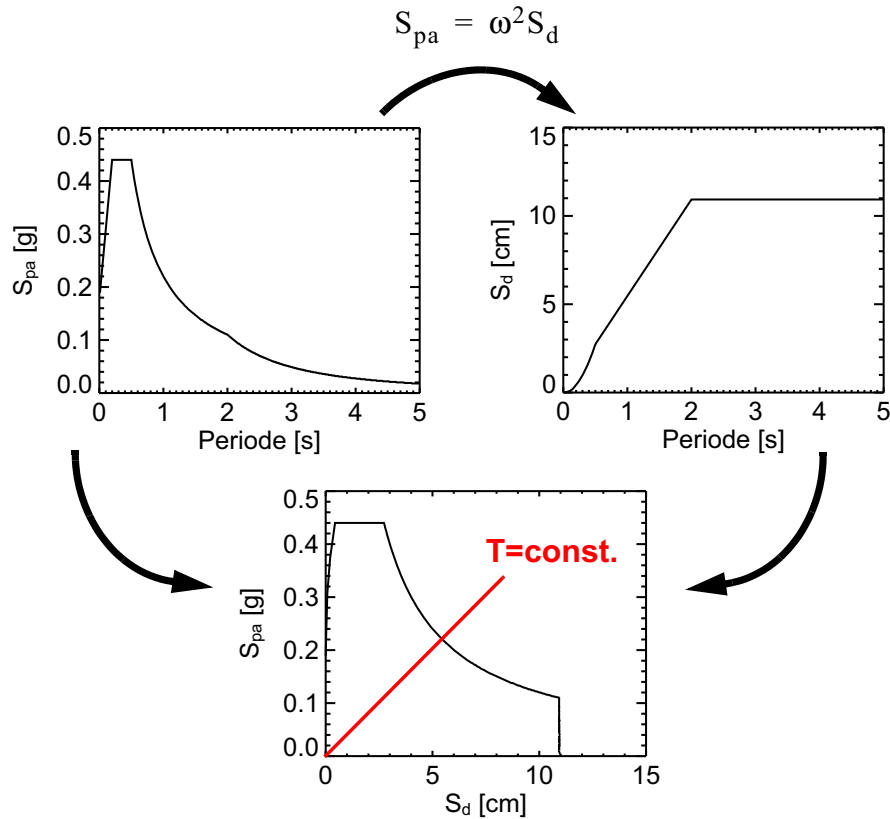


- Elastisches Bemessungsspektrum nach Newmark vs. Elastisches Antwortspektrum nach Norm SIA 261



- Die Spektren für die Norm SIA 261 und für EC8 wurden anhand ähnlicher Prinzipien wie bei den Newmark-Spektren konstruiert.
- Es wurden dabei andere Erdbeben ausgewertet.
 - Norm SIA 261 differenziert nach Baugrundklassen.
 - Es wurden unterschiedliche Bruchmechanismen untersucht
 - Es wurden viel mehr Zeitverläufe ausgewertet.
- Nebenbei: Die Figur zeigt warum in der Norm SIA 261 und im EC8 keine Periode T_A definiert ist.

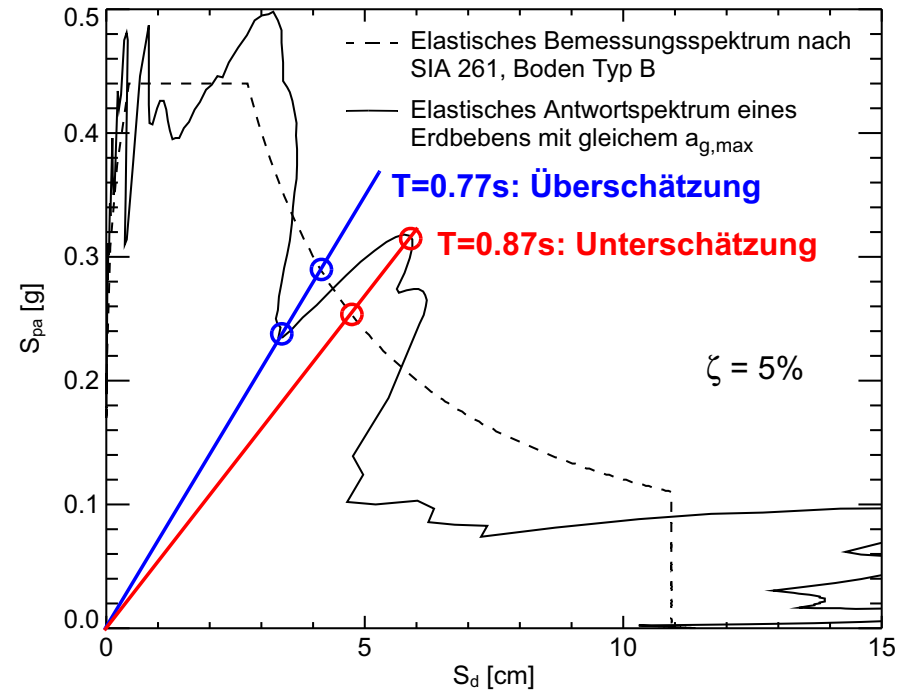
3.2.5 Elastische Bemessungsspektren in ADRS-Format (Acceleration-Displacement-Response Spectra)



Die Perioden T entsprechen Geraden, die durch den Ursprung der Achsen laufen, und zwar aus diesem Grund:

$$S_{pa} = \omega^2 S_d \text{ und nach Umformung: } T = 2\pi \sqrt{S_d / S_{pa}} \quad (3.26)$$

• Elastische Bemessungsspektren in ADRS-Format



- Bemessungsspektren werden anhand von gemittelten Antwortspektren bestimmt. Es ist deshalb möglich, dass einzelne Erdbeben Bereiche aufweisen, die durch grössere Spektralwerte im Vergleich zum Bemessungsspektrum charakterisiert sind.
- Diese wichtige Eigenschaft von Bemessungsspektren soll während der Bemessung von Tragwerken nie vergessen werden.